

Applied Mathematics in Chemical Engineering

Dr. Vahid Mahmoudi



Assistant Professor,
Department of Chemical Engineering,
University of Gonabad

پیشگفتار

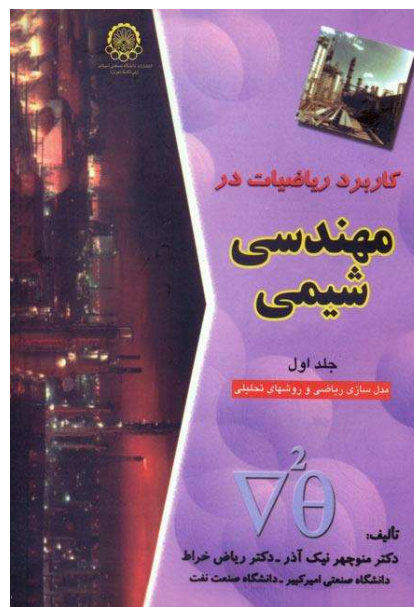
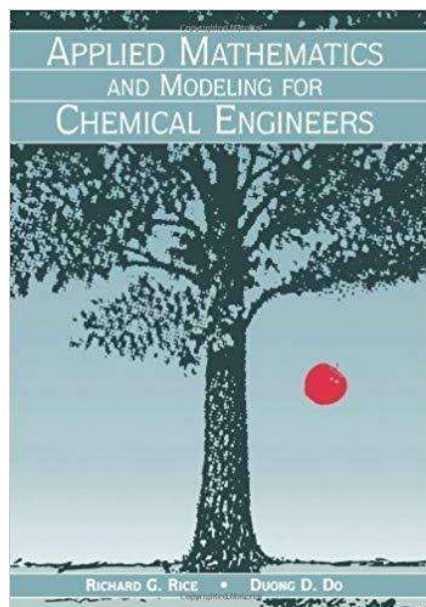
- مباحث این درس مربوط به دانش مطالعه پدیده های مربوط به مهندسی شیمی و به کارگیری ابزار ریاضی برای فرمول بندی آن ها است.
- در فصل ابتدایی، روش های مدل سازی و فرمول بندی مسائل در مهندسی شیمی بیان شده و در فصل های بعد به سراغ حل معادلات حاصل از این مدل سازی خواهیم رفت.
- با دو روش فرمول بندی یکپارچه (Lumped) و توزیع شده (Distributed) آشنا خواهیم شد.
- حل معادلات دیفرانسیل به دست آمده را با دو رویکرد تحلیلی و عددی مورد بررسی قرار داده و بهترین روش های حل معادلات معرفی می شوند.

فهرست مطالب

- فصل اول: فرمول بندی و مدل سازی مسائل
- فصل دوم: روش های حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل
- فصل سوم: مسئله $S-L$ (اشتورم-لیوویل) و مروری بر توابع متعامد
- فصل چهارم: حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به روش تفکیک متغیرها
- آزمون میان ترم
- فصل پنجم: مروری بر حل معادلات عددی به روش جبری
- فصل ششم: مشتق و انتگرال عددی
- فصل هفتم: حل معادلات معمولی به روش عددی (شرایط اولیه، شرایط مرزی)
- فصل هشتم: حل معادلات به روش عددی به روش تفاضل محدود

3

منابع



4

فصل اول



فرمول بندی و مدل سازی مسائل در مهندسی شیمی

Lumped formulation
Distributed formulation
Lumped & distributed formulation

مدل سازی

- یکی از روش های متداول جهت مطالعه تاثیر متغیرهای یک سیستم و اثر متقابل آن ها بر یکدیگر، استفاده از مدل سازی ریاضی (Mathematical Modeling) می باشد.
- منظور از مدل ریاضی یافتن مدل یا مدل هایی است که میزان و نحوه تاثیر پارامترها و متغیرهای مختلف را بر روی رفتار سیستم نشان دهد.
- در مدل سازی ریاضی، از برخی قوانین عمومی مانند قانون بقاء (جرم، انرژی و اندازه حرکت) و برخی قوانین خاص (مانند قانون فیک، قانون فوریه، قانون ویسکوزیته نیوتن و ...) استفاده می شود.
- قانون فیک: وابستگی شار انتقال جرم به گرادیان غلظت

$$J = -D \frac{dC}{dx}$$

- قانون فوریه: وابستگی شار انتقال حرارت هدایتی به گرادیان دما

$$q = -k \frac{dT}{dx}$$

- قانون سرمایش نیوتن

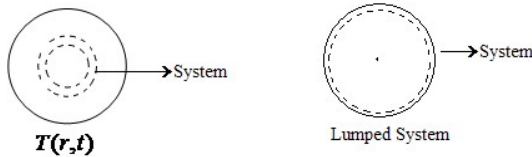
$$q = h(T - T_{\infty})$$

- قانون ویسکوزیته نیوتن: وابستگی تنش به گرادیان سرعت

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy}$$

مراحل و انواع مدل سازی

▪ مراحل لازم برای مدل سازی عبارتند از:



۱- مشخص کردن حجم کنترل

۲- انتخاب قانون کلی مدل سازی

۳- تعیین فرضیات مورد استفاده در مدل سازی

۴- تعیین موازنه حاکم بر سیستم براساس متغیرهای موجود

۵- استفاده از قوانین خاص برای تبدیل متغیرهای کلی به متغیر عملیاتی

۶- تعیین شرایط مرزی و اولیه

▪ انواع فرمول بندی

۱- فرمول بندی یکپارچه یا Lumped

۲- فرمول بندی توزیع شده یا Distributed

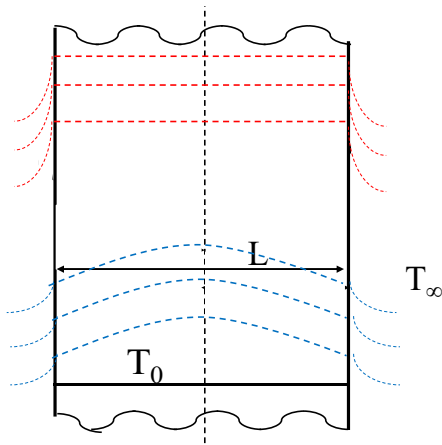
۳- فرمول بندی Integral

× در حالت ناپایا، معیار کمی برای تعیین نوع فرمول بندی عدد بایوت (Bio) می باشد.



انتخاب نوع فرمول بندی

▪ برای مثال برای یک تیغه فلزی داغ که در مجاورت یک سیال قرار گرفته است می توان گفت



$$Bio = \frac{\text{Conductive resistance of solid}}{\text{Convective resistance between fluid and solid}}$$

$$= \frac{L/k_s}{1/h_f} = \frac{h_f \cdot L}{k_s}$$

▪ L طول مشخصه جسم است که به روش مقابل تعیین می شود:

$$L = \frac{V}{A} = \frac{\text{حجم جسم}}{\text{سطح در معرض انتقال حرارت}}$$

If $Bio < 0.1$ $\Rightarrow$ Lumped formulation

If $Bio > 1$ $\Rightarrow$ Distributed formulation



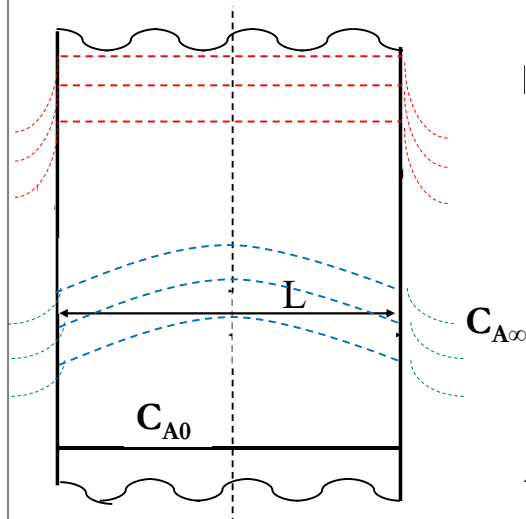
تمرین

- در یک گلوله فلزی به قطر ۱۰ cm و ضریب انتقال حرارت هدایتی $k=200 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ ، حرارتی به میزان 1 kW/m^3 به صورت همگن تولید می شود. این گلوله را در معرض سیالی با دمای 20°C و ضریب انتقال حرارت جابجایی $h=15 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ قرار می دهیم. تعیین کنید چه روش مدل سازی برای این سیستم مناسب است.

9

انتخاب نوع فرمول بندی

- برای یک تیغه متخلخل اشباع از ماده A با غلظت C_{A0} که در مجاورت یک محیط با غلظت $C_{A\infty}$ قرار گرفته است می توان گفت



$$Bio_m = \frac{\text{internal diffusion resistance}}{\text{external convection resistance}}$$

$$= \frac{L/D_A}{1/k_C} = \frac{k_C}{D_A} L$$

If $Bio_m < 0.1 \Rightarrow$ *Lumped formulation*

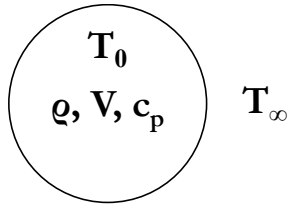
If $Bio_m > 1 \Rightarrow$ *Distributed formulation*

10

مثال

- کره ای متقارن به شعاع R_0 با دمای ابتدایی T_0 از کوره خارج شده و در محیطی با دمای T_∞ سرد می شود. معادله توزیع دما در این کره را به دست آورید.

حل:



۱- مرحله اول: انتخاب حجم کنترل

۲- تعیین قانون کلی: موازنه حرارتی

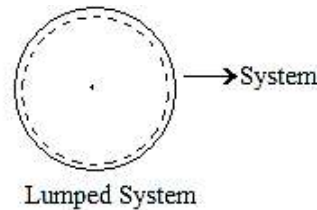
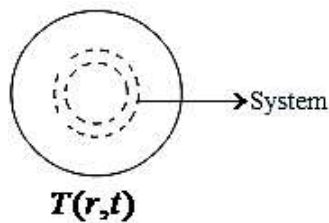
۳- فرضیات:

الف) کره کوچک، ضریب هدایت حرارتی (k_s) ثابت و خیلی بزرگ تر از h_f

نتیجه؟؟؟

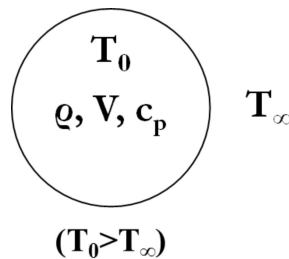
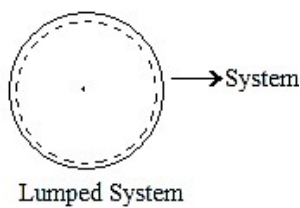
$$Bio = \frac{h_f \cdot L}{k_s}$$

حجم و دانسیته کره هم ثابت هستند.



11

مثال



۴- نوشتن موازنه

$$accumulation = input - output + generation - consumption$$

۵- استفاده از قوانین خاص

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(mc_p T) = -hA(T(t) - T_\infty)$$

$$-\left(\frac{4}{3}\pi R_o^3\right)\rho C_p \frac{dT(t)}{dt} = (4\pi R_o^2) h [T(t) - T_\infty]$$

12

مثال

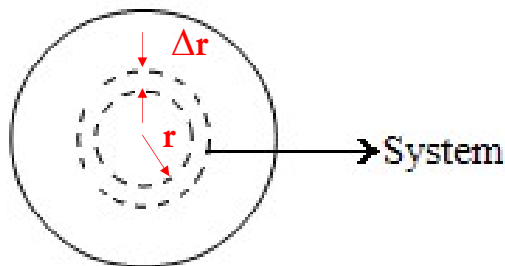
$$\frac{R_o \rho C_p}{3h} = \beta \Rightarrow \beta \frac{dT}{dt} + T(t) = T_\infty$$

$$T(t=0) = T_0$$

۶- تعیین شرایط مرزی و اولیه

تمرین: با حل این معادله دیفرانسیل، معادله تغییرات دما نسبت به زمان را به دست آورید.

ب) اگر فرض کوچک بودن کره و بزرگ بودن k صدق نداشته باشد:



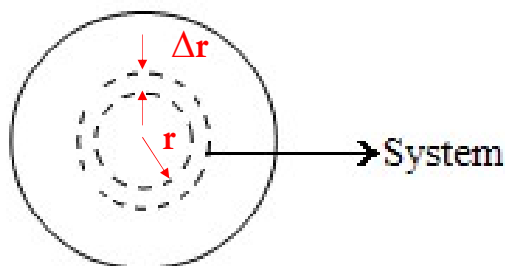
$T(r,t)$

accumulation

$= \text{input} - \text{output} + \text{generation} - \text{consumption}$

13

مثال



$T(r,t)$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

شار حرارتی ورودی به سیستم: q_r

شار حرارتی خروجی از سیستم: $q_{r+\Delta r}$

در نتیجه

$$4\pi r^2 \Delta r \rho C_p T(r, t + \Delta t) - 4\pi r^2 \Delta r \rho C_p T(r, t)$$

$$= 4\pi r^2 q_r \Delta t - 4\pi r^2 q_{r+\Delta r} \Delta t$$

با تقسیم طرفین بر $\Delta t \rightarrow 0$ و $\Delta r \rightarrow 0$

14

مثال

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\rho C_p \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r)$$

با به کارگیری قانون فوریه می توان نوشت

$$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r}$$

در نتیجه داریم

$$\rho C_p \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right)$$

با استفاده از تعریف ضریب نفوذ حرارتی (α)

$$\frac{k}{\rho C_p} = \alpha$$

در نتیجه

15

مثال

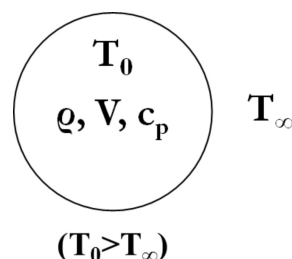
$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right)$$

این معادله نیاز به یک شرط اولیه و دو شرط مرزی در بُعد r دارد.

شرط اولیه:

شرایط مرزی:

$$-k \frac{\partial T(R_o, t)}{\partial r} = h[T(R_o, t) - T_\infty]$$



16

مثال

در یک راکتور CSTR یک واکنش گرماگیر با معادله $A \xrightleftharpoons[k_2]{k_1} B + C$ در حال انجام است.

معادلات دیفرانسیل برای توصیف این راکتور را به دست آورید.

حل:

F_i : دبی حجمی ورودی (زمان/حجم)

C_{Ai} : غلظت مولی جزء A (حجم/مول)

T_i : دمای اولیه خوراک

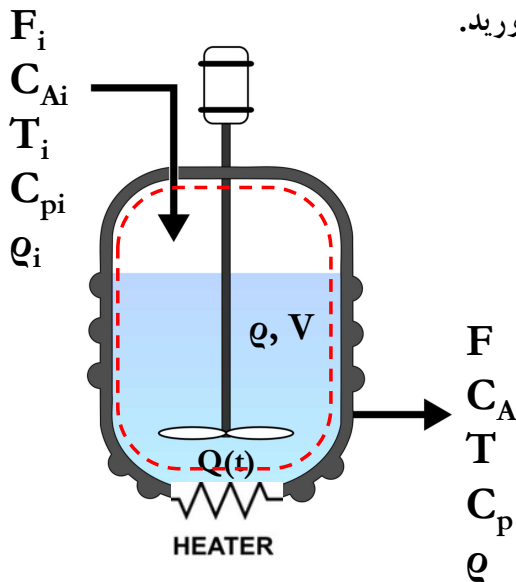
۱- انتخاب سیستم و روش مدل سازی (با دلیل)

۲- موازنه مولی

۳- دانسته و C_p ثابت است. ارتفاع مایع هم تغییر

نمی کند (دبی حجمی ثابت).

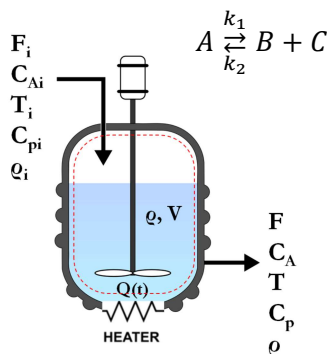
ثوابت سرعت از تئوری آرنیوس تبعیت می کنند.



17

مثال

۴- نوشتن موازنه مولی برای جزء A:



$accumulation\ of\ A = input\ of\ A - output\ of\ A$
 $+ generation\ of\ A - consumption\ of\ A$

$$\frac{d(V \cdot C_A)}{dt} = F \cdot C_{Ai} - F \cdot C_A - (k_1 C_A - k_2 C_B C_C) V$$

نیاز به اطلاعات غلظت جزء B و C نیز می باشد. در نتیجه باید موازنه مولی برای جزء B و C هم نوشته شود:

$$\frac{d(V \cdot C_B)}{dt} = 0 - F \cdot C_B + (k_1 C_A - k_2 C_B C_C) V$$

18

مثال

برای تعیین k_1 و k_2 نیاز به داشتن داده های دمایی و در نتیجه نوشتن موازنه انرژی می باشد:

$$\frac{d(\rho V c_p T)}{dt} = \rho_i F_i c_{p_i} T_i - \rho F_p T + Q_t - \Delta H_r (k_1 C_A - k_2 C_B C_C) V$$

در نهایت مدل حاصل عبارتست از:

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{V} (C_{Ai} - C_A) - k_1 C_A + k_2 C_B C_C$$

$$\frac{dC_B}{dt} = -\frac{F}{V} C_B + k_1 C_A - k_2 C_B C_C$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{F}{V} (T_i - T) + \frac{Q_t}{\rho V c_p} - \frac{\Delta H_r}{\rho c_p} (k_1 C_A - k_2 C_B C_C)$$

مثال

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{V} (C_{Ai} - C_A) - k_1 C_A + k_2 C_B C_C$$

$$\frac{dC_B}{dt} = -\frac{F}{V} C_B + k_1 C_A - k_2 C_B C_C$$

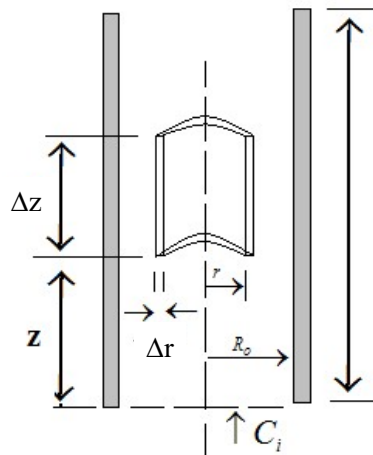
$$\frac{dT}{dt} = \frac{F}{V} (T_i - T) + \frac{Q_t}{\rho V c_p} - \frac{\Delta H_r}{\rho c_p} (k_1 C_A - k_2 C_B C_C)$$

۶- برای این معادلات، ۴ شرط اولیه نیاز است که عبارتند از:

مثال

دیواره یک راکتور استوانه ای به شعاع R_0 و طول L با کاتالیزور پوشش داده شده است. دیواره لوله در دمای ثابت T_w بوده و گاز A با غلظت ورودی متوسط C_i و با سرعت ثابت V با همین دمای ثابت از لوله عبور می کند. گاز A روی سطح کاتالیست یک واکنش غیر برگشتی درجه اول با معادله $A \rightarrow B$ انجام می دهد. معادله دیفرانسیلی به دست آورید که به کمک آن بتوان توزیع پایای غلظت در راکتور را به دست آورد.

حل:



جریان گاز ورودی با سرعت توده سیال: $2\pi V r \Delta r C$

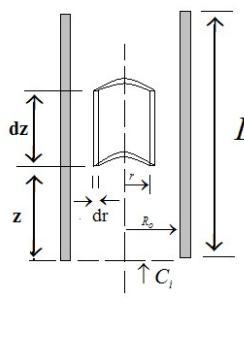
جریان گاز ورودی در اثر نفوذ در جهت z : $-D 2\pi r \Delta r \frac{\partial C}{\partial z}$

جریان گاز ورودی در اثر نفوذ در جهت r : $-D 2\pi r \Delta z \frac{\partial C}{\partial r}$

21

مثال

با نوشتن موازنه جرمی برای ماده A داریم:



$$2\pi V r \Delta r C|_z - 2\pi r \Delta r \frac{\partial C}{\partial z} D|_z - D 2\pi r \Delta z \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_r - 2\pi V r \Delta r C|_{z+\Delta z} + 2\pi r \Delta r \frac{\partial C}{\partial z} D|_{z+\Delta z} + D 2\pi r \Delta z \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r+\Delta r} = 0$$

با تقسیم عبارت بر $2\pi r \Delta r \Delta z$ و $\Delta r, \Delta z \rightarrow 0$ می توان نوشت:

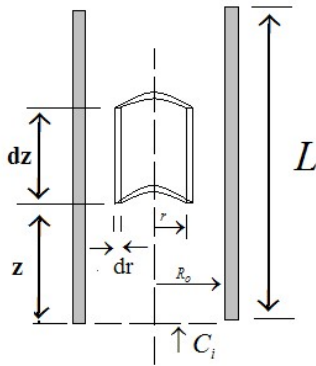
$$V \frac{\partial C}{\partial z} = D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) \right] + D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow V \frac{\partial C(r, z)}{\partial z} = D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial C(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 C(r, z)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 C(r, z)}{\partial z^2} \right]$$

22

مثال

سوال: شرط اولیه و شرط مرزی؟؟؟؟



$$V \frac{\partial C(r, z)}{\partial z} = D \left[\frac{\partial^2 C(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 C(r, z)}{\partial z^2} \right]$$

معادله زیر نیاز به دو شرط مرزی در جهت z و دو شرط مرزی در جهت r دارد.

23

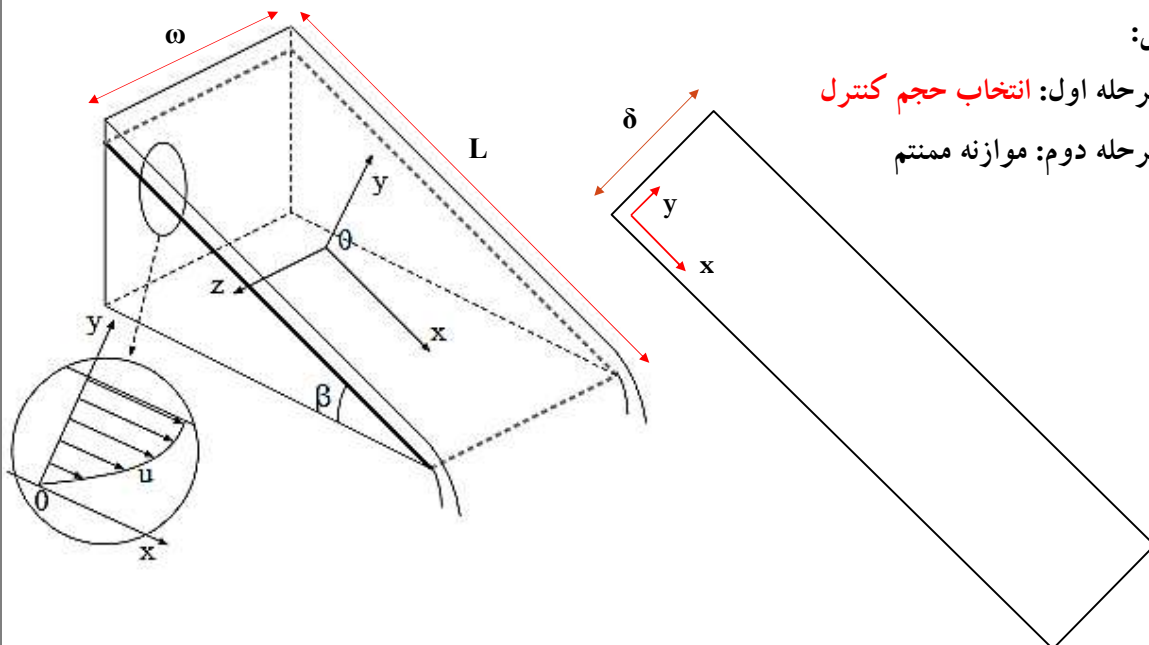
مثال

فیلمی از سیال بر روی دیواره در حال حرکت است. با فرض این که از مدل Lumped-distributed استفاده کنیم، توزیع سرعت در حالت پایا را به دست آورید.

حل:

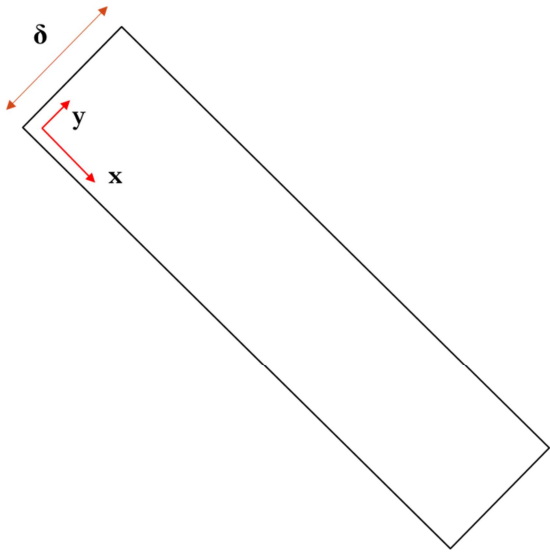
۱- مرحله اول: انتخاب حجم کنترل

۲- مرحله دوم: موازنه ممنتوم



24

مثال



۳- فرضیات

- جریان توسعه یافته در جهت x
- سیال تراکم ناپذیر (دانسیته ثابت)
- ویسکوزیته سیال ثابت
- سیال نیوتنی

۴- نوشتن موازنه: موازنه نیرو در جهت x

$$\Rightarrow (\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y)L \cdot \omega + (\dot{m}u|_{x=0} - \dot{m}u|_{x=L}) + (p|_{x=0} - p|_{x=L})\Delta y \cdot \omega + (\rho g \sin \beta \cdot (\Delta y \cdot L \cdot \omega)) = 0$$

$$\Rightarrow (\tau_{yx}|_{y+\Delta} - \tau_{yx}|_y)L \cdot \omega + (\rho u_x \cdot u|_{x=0} - \rho u_x \cdot u|_{x=L})\Delta y \cdot \omega + (p|_{x=0} - p|_{x=L})\Delta y \cdot \omega + (\rho g \sin \beta \cdot (\Delta y \cdot L \cdot \omega)) = 0$$

25

مثال

۴- نوشتن موازنه

کل عبارت تقسیم بر $\Delta y \cdot L \cdot \omega$ و $\Delta y \rightarrow 0$

$$\frac{\tau_{yx}|_{y+\Delta} - \tau_{yx}|_y}{\Delta y} + \rho g \sin \beta = 0$$

۵- استفاده از قوانین خاص

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

قانون ویسکوزیته (سیال نیوتنی)

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} \left(\mu \frac{du_x}{dy} \right) + \rho g \sin \beta = 0 \Rightarrow \mu \frac{d^2 u_x}{dy^2} + \rho g \sin \beta = 0$$

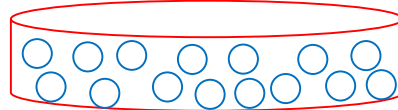
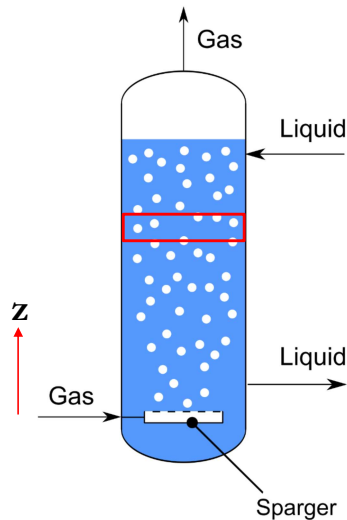
۶- شرایط مرزی و اولیه؟؟؟

* پاسخ نهایی؟؟؟ (۵ دقیقه)

26

مثال

▪ در یک راکتور bubble column، واکنش $2A_{(g)} + C_{(l)} \rightarrow D_{(l)}$ انجام می شود. می خواهیم مدل حاکم بر این فرآیند را به دست آوریم.



حل:

۱- انتخاب حجم کنترل

۲- موازنه مولی

L : فلاکس مولی مایع

S : سطح مقطع راکتور

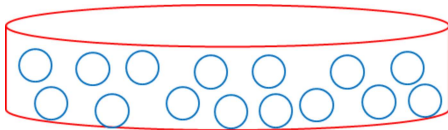
c : دانسیته مولی مایع

x : کسر مولی جزء D در فاز مایع

27

مثال

۳- فرضیات مورد استفاده



- از میزان تبخیر D و C صرف نظر می کنیم.

- با وجود انجام واکنش، دما در طول راکتور ثابت است.

- در سطح مقطع از فرض **plug** استفاده می شود.

- واکنش سریع است.

- گاز از ماده A رقیق است، در نتیجه فلاکس انتقال جرم در طول راکتور ثابت است.

- دانسیته مولی مایع (c) ثابت است.

۴- نوشتن موازنه مولی جزء D

$$accumulation = input - output + generation - consumption$$

$$\frac{\partial n_D}{\partial t} = (L \cdot x|_{z+\Delta z} - L \cdot x|_z)S + N_D \cdot a \cdot S \cdot \Delta z$$

a : سطح ویژه $\left(\frac{\text{surface of bubbles}}{\text{Volume}} \right)$

28

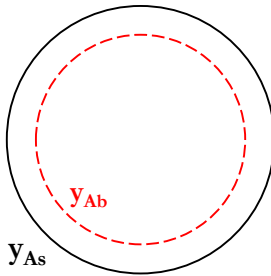
۴- نوشتن موازنه مولی جزء D

$$\frac{\partial}{\partial t}(S \cdot \Delta z \cdot c \cdot x) = (L \cdot x|_{z+\Delta z} - L \cdot x|_z)S + \frac{N_A}{2} \cdot a \cdot S \cdot \Delta z$$

با تقسیم کل عبارت بر $S \cdot \Delta z$ و $\Delta z \rightarrow 0$

$$c \frac{\partial x}{\partial t} = L \frac{x|_{z+\Delta z} - x|_z}{\Delta z} + \frac{N_A}{2} \cdot a \Rightarrow c \frac{\partial x}{\partial t} = L \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{N_A}{2} \cdot a$$

۵- استفاده از قوانین خاص



$$N_A = F_G \cdot \ln \left(\frac{1 - y_{As}}{1 - y_{Ab}} \right)$$

۶- شرط مرزی و اولیه

تشابه معادلات انتقال حرارت، جرم و منتهم

▪ گرادیان میدان اسکالر

$$\text{grad } \Phi = \nabla \Phi = i \frac{\partial \Phi}{\partial x} + j \frac{\partial \Phi}{\partial y} + k \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

▪ دیورژانس میدان برداری $A = A_x i + A_y j + A_z k$ به شکل زیر تعریف می شود:

$$\text{div} A = \nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

▪ کرل میدان برداری $A = A_x i + A_y j + A_z k$ به شکل زیر تعریف می شود:

$$\text{Curl} A = \nabla \times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

معادلات نفوذ در انتقال حرارت

▪ از فرمولاسیون دیفرانسیل برای این مسائل، معادله کلی زیر حاصل می شود

$$\rho C \frac{DT}{Dt} + \nabla \cdot q = u''' \quad (1)$$

که u''' حرارت تولید شده به ازای واحد حجم می باشد.

▪ با استفاده از قانون فوریه

$$q = -k \nabla T \quad (2)$$

▪ در نهایت داریم

$$\rho C \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + u''' \Rightarrow \rho C \frac{DT}{Dt} = \nabla k \cdot \nabla T + k \nabla^2 T + u''' \quad (3)$$

▪ که ∇^2 همان اپراتور لاپلاسین می باشد.

▪ در صورت ثابت بودن k

$$\nabla k = 0.0 \xrightarrow{(3)} \rho C \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + u''' \quad (4)$$

31

معادلات نفوذ در انتقال حرارت

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T + u''' / \rho C \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho C}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (6) \quad \text{در مختصات کارتزین}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (7) \quad \text{در مختصات استوانه ای}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\Phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \Phi} \quad (8) \quad \text{در مختصات کروی}$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (9)$$

32

معادلات نفوذ در انتقال حرارت

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned} \right\} \text{در مختصات استوانه ای}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \text{در مختصات استوانه ای} \quad (10)$$

معادلات نفوذ در انتقال حرارت

در مختصات کروی

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \sin \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ z &= r \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

∇^2 در مختصات کروی

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{aligned} \quad (12)$$

معادلات نفوذ در انتقال حرارت

با بسط کامل معادله (۵):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + u''' / \rho C \quad (13)$$

معادله (۵) برای جامدات (k ثابت و سرعت صفر و بدون تولید حرارت) خواهد بود (معادله نفوذ):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

معادله (۵) برای سیالات غیرقابل تراکم (k و دانسیته ثابت، جریان آرام و در حالت پایا) خواهد بود:

$$V \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T$$

معادله (۵) در حالت پایا برای جامدات با تولید حرارت خواهد بود:

$$\nabla^2 T + u''' / k = 0.0$$

و در جامدات با شرایط فوق بدون تولید حرارت خواهد شد (معادله لاپلاسین):

$$\nabla^2 T = 0.0$$

35

سیستم های انتقال جرم

معادله پیوستگی کلی به صورت زیر بیان می شود:

$$\nabla \cdot (\rho u) = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

u_x, u_y, u_z مولفه های بردار سرعت هستند.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.0 \Rightarrow \nabla \cdot (\rho u) = 0.0$$

در حالت پایدار:

$$\rho = cte \Rightarrow \nabla \cdot u = 0.0 \text{ or } \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.0$$

جریان تراکم ناپذیر:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

در مختصات استوانه ای:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho u_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho u_\phi)}{\partial \phi} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

در مختصات کروی:

36

سیستم های انتقال جرم

برای سیستم های انتقال جرم به همراه واکنش شیمیایی معادله انتقال به صورت زیر می باشد:

$$\frac{DC}{Dt} = D\nabla^2 C + R$$

D : ضریب نفوذ R: سرعت واکنش

$$\frac{DC}{Dt} = D\nabla^2 C \quad \Leftarrow \quad R=0.0 \quad \text{اگر}$$

برای سیستم ساکن معادله فوق خواهد شد:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\nabla^2 C$$

معادله نفوذ یا قانون دوم نفوذ فیک

برای سیستم بدون واکنش شیمیایی در حالت پایدار برای جریان آرام خواهیم داشت:

$$V \cdot \nabla C = D\nabla^2 C$$

و برای نفوذ در جامدات در حالت پایدار بدون واکنش شیمیایی داریم:

$$\nabla^2 C = 0.0$$

معادلات فوق برای سیستمهای با دانسیته ثابت نوشته شده اند.

37

سیستم های انتقال ممنتوم یا حرکت سیالات

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla \cdot \tau - \nabla P + \rho g$$

معادله حرکت در حالت کلی به شکل زیر بیان می شود:

معادله حرکت برای سیال نیوتنی با خواص ثابت خواهد بود:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \mu \nabla^2 \vec{V} - \nabla P + \rho \vec{F} \quad \text{Navier - Stockes} \quad (1)$$

μ : ویسکوزیته $\vec{F}$: نیروهای ثقلی یا Body force P : فشار

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \rho F - \nabla P \quad \frac{DV}{Dt} = F - \frac{\nabla P}{\rho} \quad (2) \text{ معادله اولر یا معادله ممنتوم}$$

معادله فوق در مختصات کارتزین در سه جهت خواهد بود:

$$\frac{DV_x}{Dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{DV_y}{Dt} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{DV_z}{Dt} = \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$$

38



فصل دوم

روش های حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل



مقدمه

معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) Ordinary Differential Equation

معادله دیفرانسیل: معادله ای است که شامل مشتق یا مشتقات یک تابع باشد.

معادله دیفرانسیل معمولی: معادله دیفرانسیلی که تنها شامل یک متغیر مستقل می باشد.

معادله دیفرانسیل پاره ای (PDE) Partial Differential Equation

معادله دیفرانسیلی که دارای بیش از یک متغیر مستقل باشد.

مرتبه (Order) معادله دیفرانسیل: بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را مرتبه آن معادله دیفرانسیل می نامند.

درجه معادله دیفرانسیل: توان بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را درجه آن معادله دیفرانسیل می نامند .

$$(y'')^3 + (y')^5 + 5y = x^2 \quad \text{مرتبه ۲، درجه ۳}$$

$$y'' + 2y' - y = \tan x \quad \text{مرتبه ۲، درجه ۱}$$

حل عمومی General Solution: جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n شامل n ثابت خواهد بود. مثلاً

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' = 4$ خواهد بود:

$$y = 2x^2 + Ax + B \quad \text{که } A \text{ و } B \text{ دو ثابت هستند.}$$

مقدمه

حل خاص Particular Solution: یا جواب خاص یک معادله دیفرانسیل، جوابی است که از حل عمومی معادله به ازای مقادیر خاص و معلوم ثوابت حاصل می شود. به عنوان مثال با قرار دادن $A=3$ و $B=5$ جواب خاص مثال فوق به صورت زیر است:

$$y = 2x^2 + 3x + 5$$

برای پیدا کردن جواب خاص که معادله دیفرانسیل درجه n را ارضا کند نیاز به n شرط مرزی وجود دارد.

حل منفرد Singular Solution: یا جواب منفرد، جوابی است که از حل عمومی معادله (توسط مشخص کردن ثوابت) نتواند حاصل شود. برای مثال:

$$y = xy' - (y')^2$$

$$y = Ax - A^2$$

جواب عمومی:

$$y = x^2/4$$

جواب منفرد:



مقدمه

دسته بندی ODE:

- معادلات خطی (Linear Equation): روشهای حل عمومی دارند.
 - معادلات غیر خطی (Nonlinear Equation): به جز موارد خاص روشهای حل عمومی ندارند.
- معادله دیفرانسیل مرتبه n ام خطی در حالت کلی به صورت زیر است:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = g(x)$$

معادله همگن: $g(x) = 0.0$

معادله غیرهمگن: $g(x) \neq 0.0$

تشکیل معادله دیفرانسیل از یک رابطه اولیه:

برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل، ثابتهای موجود در معادله دسته منحنی را حذف می کنیم. هرگاه معادله دسته منحنی دارای n ثابت باشد باید n بار مشتق بگیریم و با استفاده از این مشتقات و معادله دسته منحنی ثابت ها را حذف کنیم.



مثال) معادله دیفرانسیل دسته منحنی به معادلات $y = \frac{c_1}{x} + c_2$ را بیابید.

(حل)

$$y = \frac{c_1}{x} + c_2 \Rightarrow y' = -\frac{c_1}{x^2} \Rightarrow c_1 = -x^2 y'$$

$$y'' = \frac{2c_1}{x^3} \Rightarrow x^3 y'' = 2c_1 \Rightarrow x^3 y'' = -2x^2 y' \Rightarrow xy'' + 2y' = 0.0$$

هرگاه بخواهیم از معادله دسته جواب $y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots$ به معادله دیفرانسیل مربوطه

دست یابیم از بسط دترمینان زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{vmatrix} y & f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ y' & f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ y^{(n)} & f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & \dots & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0.0$$

روش های حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

۱- روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0.0 \quad (۱)$$

کل عبارت تقسیم بر $f_2(x)g_1(y) \neq 0.0$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0.0 \quad (۲)$$

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = c$$

مثال) مطلوبست حل معادله دیفرانسیل زیر

$$(x^2 y + x^2)dx + (xy^2 - y^2)dy = 0.0$$

روش های حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

▪ حل:

$$x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0.0$$

تقسیم بر $(y+1)(x-1)$

$$\frac{x^2}{x-1}dx + \frac{y^2}{y+1}dy = 0.0$$

$$\int \left(x+1 + \frac{1}{x-1} \right) dx + \int \left(y-1 + \frac{1}{y+1} \right) dy = C_1$$

روش های حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

▪ مثال: مطلوبست حل معادله دیفرانسیل زیر

$$\frac{dy}{dx} = (y-4x)^2$$

$$dy = (y-4x)^2 dx \quad (1)$$

$$y-4x=v \Rightarrow dy=4dx+dv \quad (2)$$

$$4dx+dv=v^2 dx \Rightarrow dx + \frac{dv}{4-v^2} = 0.0 \quad (1) \text{ و } (2)$$

$$dx + \left(\frac{A}{2-v} + \frac{B}{2+v} \right) dv = 0.0$$

$$\frac{A}{2-v} + \frac{B}{2+v} = \frac{1}{4-v^2}$$

$$2A + Av + 2B - Bv = 1$$

روش های حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

$$\begin{cases} A - B = 0 & A = B \\ 2A + 2B = 1 & 4A = 1 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{1}{4}$$

$$dx + \frac{1}{4} \left(\frac{dv}{2-v} + \frac{dv}{2+v} \right) = 0.0$$

$$x + \frac{1}{4} \ln(v+2) - \frac{1}{4} \ln(v-2) = C_1$$

$$x + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{v+2}{v-2} \right) = C_1$$

$$\ln \left(\frac{v+2}{v-2} \right) = \ln C - 4x$$

$$\frac{v+2}{v-2} = Ce^{-4x}$$

$$\frac{y-4x+2}{y-4x-2} = Ce^{-4x}$$



معادلات کامل Exact Equations

▪ در صورتی که معادله ای به شکل مقابل داشته باشیم:

$$df(x, y) = 0$$

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

▪ می توان نوشت

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$M = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$N = \frac{\partial f}{\partial y}$$

▪ که در آن

▪ در این صورت، شرط کامل بودن معادله دیفرانسیل به شکل زیر است:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

▪ و جواب این معادله از حل معادله زیر حاصل می شود:

$$\int M dx + \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right] dy = C$$



معادلات کامل Exact Equations

▪ مثال: مطلوبست حل معادله دیفرانسیل مقابل:

$$(2xy^2 + 2)dx + (2x^2y + 4y)dy = 0$$

حل:

$$M(x, y) = 2xy^2 + 2 \quad N(x, y) = 2x^2y + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \Rightarrow f(x, y) = \int M(x, y)dx + C(y) \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N \Rightarrow f(x, y) = \int N(x, y)dy + A(x) \quad (2)$$

$$f(x, y) = \int (2xy^2 + 2)dx + C(y) = y^2x^2 + 2x + C \quad (3)$$

معادلات کامل Exact Equations

▪ می توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} (3) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} &= 2yx^2 + \frac{dC}{dy} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= N = 2yx^2 + 4y \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2x^2y + 4y = 2yx^2 + \frac{dC}{dy}$$

▪ از حل این معادله می توان ثابت C به دست آورد (؟؟؟).

$$C = 2y^2 + \alpha \quad (4)$$

▪ در نهایت خواهیم داشت

$$(3), (4) \Rightarrow f(x, y) = x^2y^2 + 2x + 2y^2 + \alpha$$

روش فاکتور انتگرال (IF) Integral Factor

▪ اگر در معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ داشته باشیم

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

(معادله کامل نیست)

▪ اگر با ضرب معادله در یک ضریب (μ) بتوان معادله را کامل کرد:

$$\mu M \partial x + \mu N \partial y = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

▪ در این صورت داریم:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = q(x) \Rightarrow IF = \mu = e^{\int q(x) dx}$$

فرض: عامل انتگرال ساز تابعی از x باشد:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = g(y) \Rightarrow IF = \mu = e^{\int g(y) dy}$$

فرض: عامل انتگرال ساز تابعی از y باشد:

▪ در نهایت جواب از معادله زیر به دست می آید:

$$\int \mu M \partial x + \int \left[\mu N - \frac{\partial}{\partial y} \int \mu M \partial x \right] \partial y = C$$

51

روش فاکتور انتگرال (IF) Integral Factor

▪ نحوه به دست آوردن فرمول μ در اسلاید قبل (با فرض این که μ تابعی از x باشد):

▪ می دانیم:

$$\mu M \partial x + \mu N \partial y = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

▪ در این صورت داریم:

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x} \Rightarrow \mu \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

▪ با مرتب کردن معادله داریم:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} = q(x) \Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = \int q(x) dx \Rightarrow \ln \mu(x) = \int q(x) dx$$

$$\Rightarrow e^{\ln \mu(x)} = e^{\int q(x) dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int q(x) dx}$$

52

روش فاکتور انتگرال (IF) Integral Factor

■ مثال: مطلوبست حل معادله زیر:

$$(2x^3y^2 + 4x^2y + 2xy^2 + xy^4 + 2y)dx + 2(y^3 + x^2y + x)dy = 0$$

■ حل:

$$Mdx + Ndy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} =$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

■ پس می توان گفت معادله دیفرانسیل کامل نیست.



روش فاکتور انتگرال (IF) Integral Factor

■ تعیین فاکتور انتگرال (با فرض عامل انتگرال ساز تابع x):

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{4x^3y + 4x^2 + 4xy^3}{2(y^3 + x^2y + x)} = 2x = q(x)$$

$$IF = \mu = e^{\int q(x)dx}$$

■ برای تعیین جواب نهایی داریم:

$$\int e^{x^2} M dx + \int \left[e^{x^2} N - \frac{\partial}{\partial y} \int e^{x^2} M dx \right] dy = C$$

$$(2x^2y^2 + 4xy + y^4)e^{x^2} = C$$



معادلات خطی درجه اول نا همگن (Linear Equation)

▪ اگر معادله خطی درجه اول به صورت زیر باشد، آنگاه فاکتور انتگرال را به روش زیر می توان تعیین کرد:

$$\frac{dy}{dx} + \alpha(x)y = f(x) \quad f(x) = \text{forcing function}$$

$$IF(x) = \mu = e^{\int \alpha(x) dx}$$

▪ در نتیجه داریم:

$$y = \frac{1}{\mu} \left[\int \mu f(x) dx + C \right]$$

▪ مثال: مطلوبست حل معادله دیفرانسیل $x \frac{dy}{dx} = y + x^3 + 3x^2 - 2x$

حل: با تقسیم کل عبارت بر x داریم:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2 + 3x - 2$$



معادلات خطی (Linear Equation)

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2 + 3x - 2$$

▪ از آن جا که معادله به صورت خطی و درجه اول در آمده است:

$$y = x \left[\int \frac{1}{x} (x^2 + 3x - 2) dx + C \right]$$

$$2y = x^3 + 6x^2 - 4x \ln x + Cx$$



معادلات همگن (Homogeneous Equation)

▪ معادله $f(x,y)$ را همگن از درجه n گویند اگر:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

▪ برای مثال:

$$f(x, y) = x^2 + xy$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 (x^2 + xy) = \lambda^2 f(x, y)$$

$$Q(x, y)dx + P(x, y)dy = 0 \quad V = \frac{y}{x}$$

▪ همواره با اعمال تغییر متغیر V می توان نوشت:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1)$$

$$\frac{y}{x} = V \quad y = xV \quad \frac{dy}{dx} = V + x \frac{dV}{dx} \quad (2)$$

57

معادلات همگن (Homogeneous Equation)

▪ از (۱) و (۲) می توان نوشت

$$V + x \frac{dV}{dx} = F(V)$$

$$xdV - (F(V) - V)dx = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dV}{F(V) - V} = C$$

▪ مثال: مطلوبست حل معادله $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$

$$(x^2 - xy) \frac{dy}{dx} = -y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{1}{\frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^2} = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1)$$

$$\frac{y}{x} = V \quad \frac{dy}{dx} = V + x \frac{dV}{dx} \quad (2)$$

58

معادلات همگن (Homogeneous Equation)

▪ از (۱) و (۲) می توان نوشت:

$$V^2 x^2 + (x^2 - x^2 V) \left[V + x \frac{dV}{dx} \right] = 0$$

▪ در نتیجه داریم

$$\frac{dV}{V} (V - 1) = \frac{dx}{x}$$

▪ با انتگرال گیری می توان نوشت

$$V - \ln V = \ln x + \ln C_1 \Rightarrow \ln C_1 x V = V$$

▪ و در نهایت

$$C_1 x V = e^V \Rightarrow C_1 x \frac{y}{x} = e^{y/x} \Rightarrow y = C e^{y/x}$$

معادلات برنولی (Bernoulli's Equation)

▪ معادله ای به شکل (۱) $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ که در آن، $n \neq 0, 1$ است.

▪ اگر $n=0$ باشد، معادله به صورت خطی بوده و در صورتی که $n=1$ باشد، به کمک روش جداسازی متغیر می توان معادله را حل کرد.

▪ در حالتی که $n \neq 0, 1$ باشد به کمک تغییر متغیر $V = y^{1-n}$ می توان معادله را حل کرد:

$$dV = (1-n)y^{-n} dy \Rightarrow dy = \frac{1}{1-n} y^n dV \quad (۲)$$

▪ با قرار دادن (۲) در معادله (۱) می توان نوشت

$$\frac{1}{1-n} y^n \frac{dV}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

▪ با تقسیم معادله بر y^n داریم:

$$\frac{1}{1-n} \frac{dV}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \Rightarrow \frac{dV}{dx} + (1-n)P(x)V = (1-n)Q(x)$$

$$V e^{(1-n) \int P dx} = (1-n) \int Q e^{(1-n) \int P dx} dx + C$$

$$y = \frac{1}{\mu} \left[\int \mu f(x) dx + C \right]$$

معادلات برنولی (Bernoulli's Equation)

▪ مثال: معادله دیفرانسیل مقابل را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} + y = y^2(\cos x - \sin x)$$

حل: با بررسی معادله می توان نوشت:

$$V = y^{1-n} = y^{-1} \Rightarrow \frac{dV}{dx} - V = \sin x - \cos x$$

$$IF = e^{(1-n)\int P dx} = e^{-1\int dx} = e^{-x}$$

$$Ve^{-x} = \int (\sin x - \cos x)e^{-x} dx + C \Rightarrow \frac{1}{y} = -\sin x + Ce^x$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر

▪ معادله به شکل زیر را یک معادله دیفرانسیل خطی با مرتبه n می نامند:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = R(x)$$

در صورتی که $R(x) = 0$ معادله همگن و اگر $R(x) \neq 0$ باشد معادله فرم ناهمگن دارد.

▪ روش حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی:

$$P = \frac{dy}{dx} \quad (\text{if } y \text{ or } x \text{ does not appear explicitly}) \quad -1$$

$$\text{homogeneous function} \quad v = \frac{y}{x} \quad -2$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر

■ مثال: معادله دیفرانسیل مقابل را حل کنید.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \omega^2 \sin y = 0.0 \quad (1)$$

حل:

$$\frac{dy}{dx} = P \Rightarrow \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = P \frac{dP}{dy}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dP}{dx} = P \frac{dP}{dy} \quad (2)$$

به کمک معادلات (1) و (2) داریم:

$$P \frac{dP}{dy} + \omega^2 \sin y = 0.0 \Rightarrow P dP = -\omega^2 \sin y dy$$

$$\frac{P^2}{2} = \omega^2 \cos y + C \Rightarrow P = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{2\omega^2 \cos y + C'}$$



استفاده از عملگر D

■ می توان عملگر D را به شکل زیر تعریف کرده و به کمک آن، معادله دیفرانسیل خطی را حل کرد.

$$\frac{d}{dx} = D \quad \frac{d^2}{dx^2} = D^2 \quad \frac{d^n}{dx^n} = D^n$$

با اعمال این تعریف در معادله اصلی می توان نوشت:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = R(x)$$

$$[a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)]y = R(x)$$

پس معادله مشخصه به شکل زیر است

$$\Rightarrow \varphi(D) = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)$$



معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر

جواب معادله همگن $y_c(x)$

جواب معادله غیرهمگن یا جواب خاص $y_p(x)$

اصل برهم نهی (Superposition)

$$y = y_c + y_p$$

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

جواب همگن معادلات دیفرانسیل با روش عملگر D

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = 0.0$$

$$a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n = 0.0$$

$$D = m_1, m_2, \dots, m_n$$

$$a_0 (D - m_1)(D - m_2) \dots (D - m_n) = 0$$



معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر

الف) ریشه های m مقادیر حقیقی و غیرمساوی باشند،
در این صورت جواب همگن به صورت زیر خواهد بود:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x}$$

ب) ریشه ها مختلط باشند:

$$a \pm ib$$

$$y = e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$$

ج) ریشه ها مساوی (مضاعف) باشند:
اگر تعداد k ریشه m برابر باشند به ازای این تعداد ریشه جواب به صورت زیر است:

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_k x^{k-1}) e^{mx}$$



معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر

■ برای تعیین جواب خصوصی، می توان از روش حدس جواب خصوصی (y_p) استفاده کرد:

$R(x)$	y_p
fe^{Px}	$(ae^{Px})x^S$
$f \cos Px + g \sin Px$	$(a \cos Px + b \sin Px)x^S$
$f_0x^k + f_1x^{k-1} + \dots + f_k$	$(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k)x^S$
$e^{qx}(f \cos Px + g \sin Px)$	$[e^{qx}(a \cos Px + b \sin Px)]x^S$
$e^{Px}(f_0x^k + f_1x^{k-1} + \dots + f_k)$	$e^{Px}(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k)x^S$
$\left[(f_0x^k + f_1x^{k-1} + \dots + f_k) \cos Px + (g_0x^k + g_1x^{k-1} + \dots + g_k) \sin Px \right]$	$\left[(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k) \cos Px + (b_0x^k + b_1x^{k-1} + \dots + b_k) \sin Px \right] x^S$
$\left[e^{qx}(f_0x^k + f_1x^{k-1} + \dots + f_k) \cos Px + e^{qx}(g_0x^k + g_1x^{k-1} + \dots + g_k) \sin Px \right]$	$\left[e^{qx}(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k) \cos Px + e^{qx}(b_0x^k + b_1x^{k-1} + \dots + b_k) \sin Px \right] x^S$

■ S کوچک ترین عدد صحیح مثبتی است که جواب خصوصی را از جواب های عمومی مستقل می کند.

67

معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر

■ مثال: معادله دیفرانسیل مقابل را حل کنید.

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

حل: با استفاده از عملگر D می توان نوشت:

$$D^2y - 3Dy + 2y =$$

با به دست آوردن ریشه های معادله مشخصه داریم:

با توجه به حقیقی و نامساوی بودن ریشه ها می توان نوشت:

$$y_c = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

حال باید جواب خصوصی را تعیین کنیم.

به روش حدس جواب داریم:

$$y_p = Ax^S e^x$$

68

معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر

از آن جا که جواب خصوصی هم باید در معادله دیفرانسیل صدق کند:

با قرار دادن y_p و مشتقاتش در معادله دیفرانسیل

و در نهایت با در نظر گرفتن اصل بر هم نهی



معادله کوشی-اوایلر (Cauchy-Euler Equation)

▪ معادله مرتبه دوم خطی همگن $x^2 y'' + axy' + by = 0$ را که در آن، a و b اعداد ثابتی هستند را معادله کوشی-اوایلر می نامند.

▪ معادلات دیفرانسیل زیر از این نوع معادله می باشند:

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0 \qquad xy'' + y' - \frac{1}{x}y = 0$$

▪ این معادله را با تغییر متغیر $x = e^t$ می توان به معادله مرتبه دوم با ضریب ثابت تبدیل کرد زیرا:

$$xy' = \frac{dy}{dt} \qquad x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

▪ اگر مشتق های y نسبت به t را با Y نشان دهیم، معادله تبدیل به معادله $(Y'' - Y') + aY' + bY = 0$ می شود که یک معادله با ضرایب ثابت بوده و روش حل آن در بخش های قبل ارائه شده است.



معادله کوشی-اویلر (Cauchy-Euler Equation)

■ مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0 \xrightarrow{\times x^2} x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$$

حل: با فرض تغییر متغیر $x = e^t$ داریم:

پس معادله مشخصه به شکل زیر خواهد بود:

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

در نتیجه

با جایگذاری $x = e^t$ (یا $t = \ln x$) داریم



معادله کوشی-اویلر (Cauchy-Euler Equation)

■ نکته: روش گفته شده در بخش قبل برای معادلات کوشی-اویلر از مرتبه بالاتر هم صدق می کند.

■ معادله کوشی-اویلر مرتبه سوم $x^3y''' + ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ را می توان به کمک تغییر متغیر $x = e^t$ به معادله زیر تبدیل کرد:

$$(D(D-1)(D-2) + aD(D-1) + bD + c)Y = 0$$

■ مثال: معادله دیفرانسیل $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^4$ را حل کنید.

حل: با فرض $x = e^t$ داریم:

$$D(D-1)(D-2)Y + D(D-1)Y - 2DY + 2Y = 2e^{4t}$$



تمرین

تمرین: اثبات کنید پاسخ کلی معادله دیفرانسیل مثال قبل به شکل زیر است:

$$y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^{-1} + \frac{1}{15}x^4$$

تمرین: پاسخ معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$y'' - y' + y = 0$$



روش تغییر پارامتر (تعیین y_p)

در این روش فرض می کنیم جواب خاص معادله دیفرانسیل $y'' + ay' + by = f(x)$ یا

همان y_p به صورت $y_p = v_1u_1 + v_2u_2$ باشد. از آن جا که عبارت $y_c = c_1u_1 + c_2u_2$ جواب همگن معادله دیفرانسیل بوده و با تغییر پارامترهای c_1 و c_2 و جایگزین شدن توابع $v_1(x)$ و $v_2(x)$ به جواب خصوصی رسیده ایم، این روش را روش تغییر پارامتر نامیده اند.

برای تعیین جواب خاص به این روش، تنها کافی است توابع $v_1(x)$ و $v_2(x)$ را تعیین کنیم. خواهیم داشت:

$$y'_p = v'_1u_1 + v_1u'_1 + v'_2u_2 + v_2u'_2$$

فرض می کنیم

$$v'_1u_1 + v'_2u_2 = 0 \Rightarrow y'_p = v_1u'_1 + v_2u'_2$$

در نتیجه

$$y''_p = v'_1u'_1 + v_1u''_1 + v'_2u'_2 + v_2u''_2$$



روش تغییر پارامتر (تعیین y_p)

▪ از آن جا که جواب خصوصی هم باید در معادله دیفرانسیل صدق کند، پس خواهیم داشت:

$$v_1' u_1' + v_1 u_1'' + v_2' u_2' + v_2 u_2'' + a(v_1 u_1' + v_2 u_2') + b(v_1 u_1 + v_2 u_2) = f(x)$$

▪ با فاکتورگیری می توان نوشت:

$$v_1(u_1'' + au_1' + bu_1) + v_2(u_2'' + au_2' + bu_2) + v_1' u_1' + v_2' u_2' = f(x)$$

▪ در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} v_1' u_1' + v_2' u_2' = 0 \\ v_1' u_1' + v_2' u_2' = f(x) \end{cases}$$

▪ این دستگاه معادلات، دو مجهول v_1' و v_2' دارد.

▪ برای تعیین v_1' و v_2' می توان از روش کرامر استفاده کرد.

75

یادآوری (روش کرامر)

▪ از روش کرامر برای حل دستگاه معادلات استفاده می شود. فرض کنید دستگاه معادلات چند

مجهولی را به شکل ماتریس نوشته ایم:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

▪ در نتیجه می توان نوشت

$$AX = b \Rightarrow x_i = \frac{w_i}{w}$$

▪ w دترمینان ماتریس A و w_i دترمینان ماتریسی است که از جابجایی ستون i ام ماتریس A با بردار b

حاصل می شود.

76

روش تغییر پارامتر (تعیین y_p)

▪ در نتیجه برای حل دستگاه زیر می توان گفت:

$$\begin{cases} v_1' u_1 + v_2' u_2 = 0 \\ v_1' u_1' + v_2' u_2' = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

▪ در نتیجه خواهیم داشت

$$v_1' = \frac{-f(x)u_2}{w} \quad v_2' = \frac{f(x)u_1}{w}$$

▪ در نهایت، پس از انتگرال گیری، توابع $v_1(x)$ و $v_2(x)$ به دست آمده و جواب خصوصی معادله

دیفرانسیل $y'' + ay' + by = f(x)$ به صورت $y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2$ به دست می آید.



روش تغییر پارامتر (تعیین y_p)

▪ مثال: معادله دیفرانسیل $y'' - 5y' + 6y = 3e^x$ را حل کنید.

حل: جواب همگن معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر می باشد:

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

در نتیجه خواهیم داشت $u_1 = e^{2x}$ و $u_2 = e^{3x}$

در نتیجه دستگاه معادلات زیر باید نوشته شود:

$$\begin{cases} v_1' e^{2x} + v_2' e^{3x} = 0 \\ v_1' (2e^{2x}) + v_2' (3e^{3x}) = 3e^x \end{cases}$$

با استفاده از روش کرامر خواهیم داشت

$$v_2' = \frac{3e^x e^{2x}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}}$$

$$v_1' =$$



روش تغییر پارامتر (تعیین y_p)

ادامه حل: با انتگرال گیری از توابع به دست آمده داریم:

$$v_2' = 3e^{-2x} \Rightarrow v_2 =$$

$$v_1' = -3e^{-x} \Rightarrow v_1 =$$

و جواب خصوصی به صورت زیر خواهد بود:

$$y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2 =$$

با استفاده از اصل بر هم نهی در نهایت داریم:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{3}{2} e^x$$



روش تغییر پارامتر (تعیین y_p)

▪ مثال: معادله دیفرانسیل $y'' - 5y' + 6y = 1 + x$ را حل کنید.

حل: جواب همگن معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر می باشد:

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

در نتیجه خواهیم داشت $u_1 = e^{2x}$ و $u_2 = e^{3x}$

در نتیجه دستگاه معادلات زیر باید نوشته شود:

$$\begin{cases} v_1' e^{2x} + v_2' e^{3x} = 0 \\ v_1' (2e^{2x}) + v_2' (3e^{3x}) = 1 + x \end{cases}$$

با استفاده از روش کرامر خواهیم داشت

$$v_2' = \frac{(x+1)e^{2x}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = (x+1)e^{-3x}$$

$$v_1' = -(1+x)e^{-2x}$$



روش تغییر پارامتر (تعیین y_p)

ادامه حل: با انتگرال گیری از توابع به دست آمده داریم:

$$v_2' = (1+x)e^{-3x} \Rightarrow v_2 =$$

$$v_1 = -\left(-\frac{1}{2}(1+x)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right) \Rightarrow v_1 = \frac{1}{2}(1+x)e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}$$

و جواب خصوصی به صورت زیر خواهد بود:

$$y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2 = \frac{1}{2}(1+x) + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}(1+x) - \frac{1}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} = \frac{1}{6}x + \frac{11}{36}$$

با استفاده از اصل بر هم نهی در نهایت داریم:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{11}{36} + \frac{1}{6}x$$



روش تغییر پارامتر

➤ روش تغییر پارامتر را می توان برای تعیین جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل مرتبه n خطی نیز

تعمیم داد. یعنی در صورتی که جواب عمومی معادله به صورت $y_c = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$

باشد، با فرض $y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n$ و حل دستگاه زیر می توان توابع $v_1, v_2, \dots$

v_n را تعیین و جواب خصوصی را به دست آورد.

$$\begin{cases} v_1' u_1 + v_2' u_2 + \dots + v_n' u_n = 0 \\ v_1' u_1' + v_2' u_2' + \dots + v_n' u_n' = 0 \\ \vdots \\ v_1' u_1^{(n-2)} + v_2' u_2^{(n-2)} + \dots + v_n' u_n^{(n-2)} = 0 \\ v_1' u_1^{(n-1)} + v_2' u_2^{(n-1)} + \dots + v_n' u_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$





فصل سوم

توابع متعامد

توابع انتگرالی

1. تابع گاما

- این تابع نخستین بار توسط لژاندر در سال ۱۸۱۴ مورد استفاده قرار گرفت. تعریف کلی تابع گاما به شکل زیر است:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

- طبق تعریف اگر $x=1$ باشد، می توان گفت:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} t^0 e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1$$

- همچنین می توان گفت:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt$$

- در صورتی که

$$\begin{cases} u = t^x \Rightarrow du = x t^{x-1} \\ dv = e^{-t} dt \Rightarrow v = -e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t} \right]_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$\Rightarrow \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

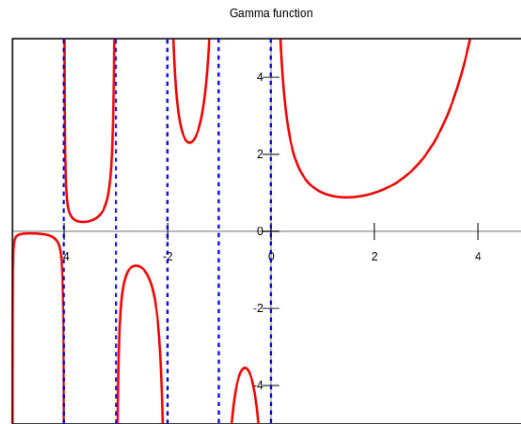
توابع انتگرالی

■ برای مقادیر صحیح از x می توان نوشت

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)(n-2)\dots(2)(1)\Gamma(1) = (n-1)!$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

x	$\Gamma(x)$
1.00	1.00000
1.01	0.99433
1.05	0.97350
1.10	0.95135
1.15	0.93304
1.20	0.91817
1.30	0.89747
1.40	0.88726
1.50	0.88623
1.60	0.89352
1.70	0.90864
1.80	0.93138
1.90	0.96177
2.00	1.00000



85

توابع انتگرالی

2. تابع بتا: این تابع بنا به تعریف خود، به تابع گاما مرتبط می شود.

■ تعریف این تابع نیز به شکل زیر است:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt; \quad x > 0, y > 0$$

■ رابطه تابع بتا و گاما به صورت زیر می باشد:

$$B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$$

■ هم چنین می توان گفت:

$$B(x, y) = B(y, x)$$

(خاصیت تقارن)

■ تمرین: اثبات کنید

$$B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$$

86

توابع انتگرالی

3. تابع خطا: این تابع معمولاً در تئوری احتمال و نفوذ جرم حرارت به کار می رود.

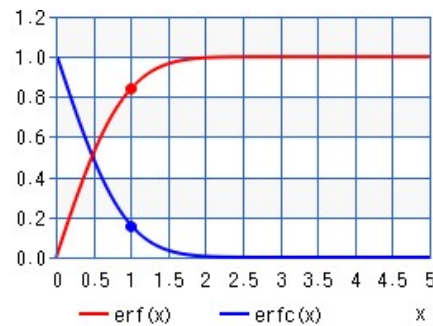
تعریف این تابع به شکل زیر است:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

به علاوه، تابعی به نام تابع مکمل خطا نیز به شکل زیر تعریف می شود:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt.$$

$$\operatorname{erf}(x) + \operatorname{erfc}(x) = 1$$



87

توابع متعامد

مجموعه $\{\varphi_n(x)\}$ را برای $n=1, 2, 3, \dots$ در نظر بگیرید. اگر این مجموعه توابع در معادله زیر صدق کنند، این توابع را عمود بر هم یا متعامد (اورتوگونال) می نامند.

$$\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) r(x) dx \begin{cases} = 0 & n \neq m \\ \neq 0 & n = m \end{cases}$$

به $r(x)$ تابع وزن گفته می شود. در بسیاری از موارد، این تابع از طریق سعی و خطا به دست می آید.

این انتگرال باید برای هر دو عضو مجموعه صدق کند تا توابع متعامد باشند. اگر مقدار انتگرال بالا برای حالت $m=n$ برابر با ۱ باشد، این مجموعه توابع را **اورتو نورمال** می نامند.

به عنوان مثال، مجموعه $\{\sin nx\}$ با تابع وزن ۱ در محدوده $[0, \pi]$ یک مجموعه متعامد است:

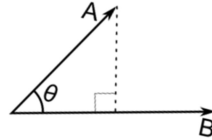
$$\int_a^b \sin nx \cdot \sin mx dx \begin{cases} = 0 & n \neq m \\ \neq 0 & n = m \end{cases}$$

88

توابع متعامد

▪ به عنوان یادآوری، ضرب داخلی دو بردار A و B که زاویه بین آن‌ها θ باشد، به شکل زیر می‌باشد:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$



▪ در صورتی که دو بردار بر یکدیگر عمود باشند $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ خواهد شد.

▪ برای ضرب داخلی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در محدوده $[a, b]$ ، عبارت زیر به کار برده می‌شود:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

توابع متعامد

▪ تعامد توابع $\sin$ و $\cos$: این توابع با تابع وزن ۱ خاصیت تعامد دارند. در نتیجه می‌توان گفت:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 2L & \text{if } n = m = 0 \\ L & \text{if } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{if } n \neq m \end{cases} \quad ۱ \quad \square$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L & \text{if } n = m = 0 \\ \frac{L}{2} & \text{if } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{if } n \neq m \end{cases} \quad ۲ \quad \square$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L & \text{if } n = m \\ 0 & \text{if } n \neq m \end{cases} \quad ۳ \quad \square$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} \frac{L}{2} & \text{if } n = m \\ 0 & \text{if } n \neq m \end{cases} \quad ۴ \quad \square$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad ۵ \quad \square$$

یکی از کاربردهای مهم (تعیین ضرایب سری فوریه)

فرض: تابع $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $p=2L$ باشد. آنگاه می توان تابع مذکور را به صورت مجموعی از جملات سینوسی و کسینوسی با آرگومان های مختلف که به سری فوریه تابع $f(x)$ موسوم است به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]$$

که در آن، a_n ، b_n و a_0 ضرایب سری فوریه نامیده می شود و از روابط زیر محاسبه می شوند:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

یکی از کاربردهای مهم (تعیین ضرایب سری فوریه)

اگر تابع $f(x)$ در فاصله L و $-L$ زوج باشد، بسط فوریه آن بصورت زیر نوشته می شود:

$$b_n = 0$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

اگر تابع $f(x)$ در فاصله $-L$ و L فرد باشد، بسط فوریه آن بصورت زیر است:

$$a_n = 0$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

قضیه اشتورم-لیوویل (S-L)

▪ اگر یک معادله خطی مرتبه ۲ همگن به شکل زیر داشته باشیم:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \beta r(x)] y(x) = 0$$

▪ که در این معادله، توابع p ، q و r در محدوده a تا b پیوسته بوده و هم چنین شرایط مرزی معادله فوق به شکل زیر باشد (همگن):

$$\begin{cases} B.C.1: a_1 y(a) + b_1 y'(a) = 0 \\ B.C.2: a_2 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

▪ آن گاه چنانچه φ_1 تا φ_n جواب های معادله به ازای λ_1 تا λ_n باشند، مجموعه $\{\varphi_n(x)\}$ نسبت به تابع وزن $r(x)$ در محدوده a تا b یک مجموعه متعامد را تشکیل می دهد. به عبارت دیگر

$$\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) r(x) dx \begin{cases} = 0 & n \neq m \\ \neq 0 & n = m \end{cases}$$

قضیه اشتورم-لیوویل (S-L)

▪ هر تابع $f(x)$ که خود و مشتقاتش در محدوده a تا b حداقل به صورت قطعه قطعه پیوسته باشند را می توان بر حسب توابع ویژه (جواب های مسئله S-L) به صورت همگرا ربط داد. در نتیجه:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

▪ برای به دست آوردن مقادیر c_n باید طرفین رابطه بالا را در انتگرال S-L ضرب کنیم:

$$\int_a^b r(x) \varphi_m(x) f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b r(x) \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{\int_a^b r(x) f(x) \varphi_n(x) dx}{\int_a^b r(x) \varphi_n^2(x) dx}$$

معادلات مرتبه دوم خاص

▪ معادلات مثلثاتی که جواب آن ها هم توابع مثلثاتی هستند:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \gamma^2 y = 0$$

▪ با مقایسه این معادله با معادله S-L داریم:

$$p(x)=1 ; q(x)=0 ; \beta=\gamma^2 ; r(x)=1 \quad \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \beta r(x)] y(x) = 0$$

▪ با استفاده از معادله مشخصه داریم:

$$m^2 + \gamma^2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm i\gamma \Rightarrow y(x) = c_1 \sin \gamma x + c_2 \cos \gamma x$$

▪ در بخش قبل اشاره شد که شرایط مرزی در مسئله S-L باید همگن باشد. شرایط زیادی مانند زیر می توان در نظر گرفت:

$$\begin{cases} B.C.1: x=0 ; y(0)=0 \Rightarrow c_2=0 \\ B.C.2: x=b ; y(b)=0 \Rightarrow \sin \gamma_n b = 0 \Rightarrow \gamma_n b = n\pi \Rightarrow \gamma_n = \frac{n\pi}{b} \end{cases}$$

مقادیر ویژه

▪ به مقادیر $\{\sin \gamma_n x\}$ توابع ویژه نیز گفته می شود که در فاصله $[0, b]$ به صورت دو به دو با یکدیگر متعامدند.

95

معادلات مرتبه دوم خاص

$$y(x) = c_1 \sin \gamma x + c_2 \cos \gamma x \Rightarrow y'(x) = \gamma (c_1 \cos \gamma x - c_2 \sin \gamma x)$$

▪ حالت دوم:

$$\begin{cases} B.C.1: x=0 ; y'(0)=0 \Rightarrow c_1=0 \\ B.C.2: x=b ; y(b)=0 \Rightarrow \cos \gamma_n b = 0 \Rightarrow \gamma_n b = \frac{(2n+1)\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma_n = \frac{(2n+1)\pi}{2b}$$

مقادیر ویژه

▪ به مقادیر $\{\cos \gamma_n x\}$ توابع ویژه نیز گفته می شود که در فاصله $[0, b]$ به صورت دو به دو با یکدیگر متعامدند.

▪ تمرین: در خصوص جواب معادله دیفرانسیل مقابل بحث کنید.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \gamma^2 y = 0$$

$$\begin{cases} B.C.1: x=0 ; y(0)=0 \\ B.C.2: x=a ; y'(a)=0 \end{cases}$$

96

معادله بسل

▪ فرم کلی این معادله به شکل زیر است

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

▪ با مقایسه این معادله با معادله S-L می توان گفت $\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \beta r(x)]y(x) = 0$

$$p(x) = x ; q(x) = -\frac{v^2}{x} ; \beta = 1 ; r(x) = x$$

▪ قبلاً در درس ریاضی مهندسی دیدیم حل معادله بسل (ضرایب متغیر) به کمک سری های توانی انجام می گیرد. با تبدیل معادله به فرم $y'' + y'/x + (1 - v^2/x^2)y = 0$ می توان گفت نقطه $x_0=0$ یک نقطه منفرد منظم برای معادله بسل است.

▪ پس حل معادله به روش فروبینیوس خواهد بود:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$$

▪ با قرار دادن مقادیر $y(x)$ و مشتقاتش در معادله و مرتب کردن داریم:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r+2} - v^2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0$$

97

معادله بسل

▪ در نهایت جواب معادله بسل (برای مقادیر غیر صحیح از v) به شکل زیر به دست می آید:

$$y(x) = c_1 J_v(x) + c_2 J_{-v}(x)$$

که در آن

$$J_v(x) = x^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+v} m! \Gamma(v+m+1)}$$

$$J_{-v}(x) = x^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-v} m! \Gamma(m-v+1)}$$

▪ اگر v یک عدد صحیح باشد، $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ خواهد شد. در این صورت، جواب ها نسبت به یکدیگر استقلال نداشته و قابل قبول نیستند.

▪ در این حالت، جواب دیگری به صورت $Y_v(x)$ به شکل زیر نیز تعریف می شود:

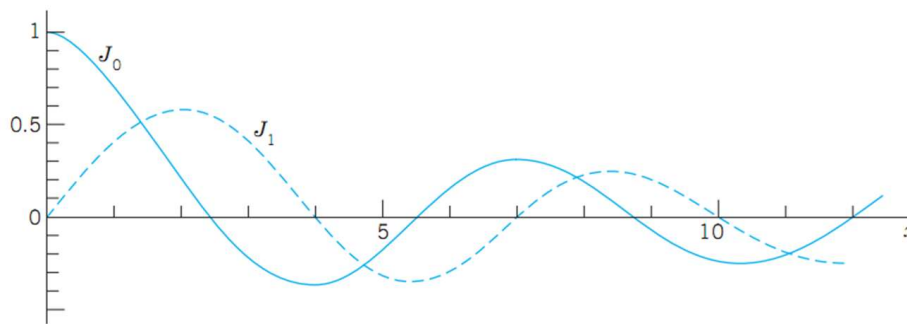
$$y(x) = C_1 J_v(x) + C_2 Y_v(x) \quad Y_v(x) = \frac{1}{\sin v\pi} [J_v(x) \cos v\pi - J_{-v}(x)]$$

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$$

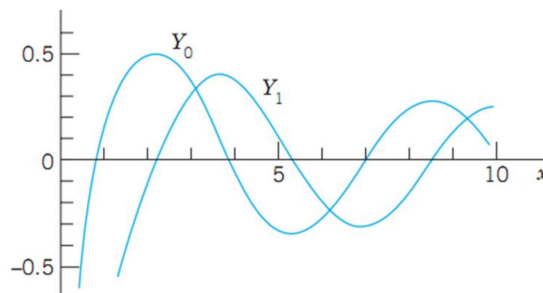
$$Y_n(x) = \lim_{v \rightarrow n} Y_v(x).$$

98

معادله بسل



Bessel functions of the first kind J_0 and J_1



Bessel functions of the second kind Y_0 and Y_1

معادله بسل اصلاح شده

▪ فرم کلی این معادله به شکل زیر است

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + p^2)y = 0$$

با مقایسه این معادله با معادله بسل

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0$$

▪ می توان معادله شبه بسل را به فرم زیر نوشت:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (-x^2 - p^2)y = 0 \xrightarrow{i^2 = -1} x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (i^2 x^2 - p^2)y = 0$$

▪ پس جواب های معادله به فرم زیر خواهند بود:

$$y = AJ_p(ix) + BJ_{-p}(ix)$$

p یک عدد غیر صحیح باشد

$$y = AJ_k(ix) + BY_k(ix)$$

$p=k$ یک عدد صحیح باشد

▪ که سری های جدید I و K (توابع شبه بسل) به صورت زیر تعریف می شوند:

$$y = AI_p(x) + BI_{-p}(x)$$

p یک عدد غیر صحیح باشد

$$y = AI_k(x) + BK_k(x)$$

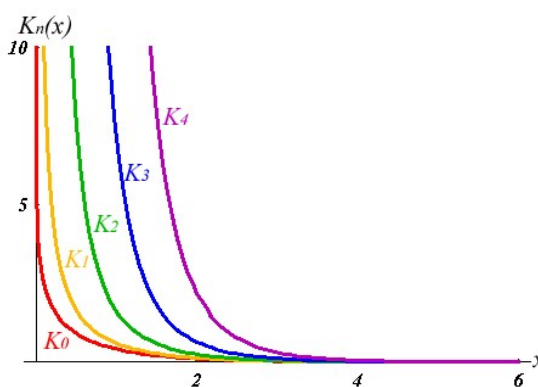
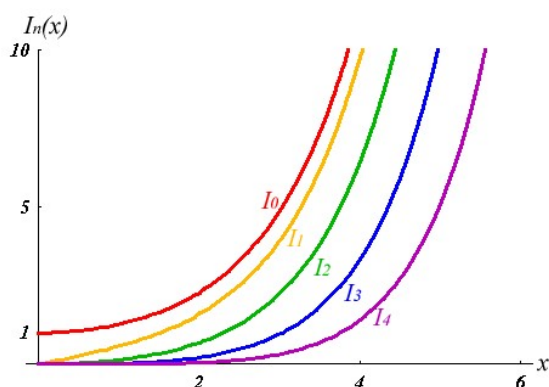
$p=k$ یک عدد صحیح باشد

معادله بسل اصلاح شده

توابع بسل اصلاح شده به شکل زیر هستند:

$$I_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((1/2)x)^{2n+p}}{n! \Gamma(n+p+1)}$$

$$K_k(x) = (-1)^{k+1} \left[\ln\left(\frac{1}{2}x\right) + \gamma \right] I_k(x) + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m (k-m-1)!}{m!} \left(\frac{1}{2}x\right)^{2m-k} \\ + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^k ((1/2)x)^{2m+k}}{m!(m+k)!} [\varphi(m+k) + \varphi(m)]$$



101

فرم عمومی معادله بسل

فرم عمومی معادله بسل به شکل زیر است

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (2p+1)x \frac{dy}{dx} + (\beta^2 x^{2r} - \alpha^2)y = 0 \quad (r \neq 0)$$

در $x=0$ ، باز هم این معادله جواب دارد، اما به شکل معادله کوشی-اوایلر در می آید.

با اعمال تغییر متغیرهای زیر، معادله به شکل زیر در می آید:

$$\begin{cases} t = \frac{x^r}{|r|} \\ Z = x^p \cdot y \end{cases} \Rightarrow t^2 Z'' + tZ' + \left[\beta^2 t^2 - \frac{q^2}{r^2} \right] Z = 0 \quad ; \quad q^2 = p^2 + r^2$$

در نتیجه

$$Z(t) = c_1 J_{\frac{q}{r}}(\beta t) + c_2 Y_{\frac{q}{r}}(\beta t)$$

و جواب نهایی عبارتست از

$$y(x) = x^{-p} \left[c_1 J_{\frac{q}{r}} \left(\beta \frac{x^r}{|r|} \right) + c_2 Y_{\frac{q}{r}} \left(\beta \frac{x^r}{|r|} \right) \right]$$

102

خاصیت تعامد معادله بسل

▪ قبلاً در معادله بسل دیدیم

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2)y = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dy}{dx} \right] + \left(\lambda^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) y = 0$$

▪ با مقایسه این معادله با معادله S-L می توان گفت

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \beta r(x)]y(x) = 0$$

$$p(x) = x ; q(x) = -\frac{\nu^2}{x} ; \beta = \lambda^2 ; r(x) = x$$

▪ می دانیم جواب این معادله به شکل زیر است:

$$y(x) = C_1 J_\nu(\lambda x) + C_2 Y_\nu(\lambda x)$$

▪ تابع بسل J دارای خاصیت تعامد بوده و تابع بسل تغییر یافته I خاصیت تعامد ندارد.

یادآوری (قضیه S-L)

▪ اگر یک معادله خطی مرتبه ۲ همگن به شکل زیر داشته باشیم:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \beta r(x)]y(x) = 0$$

▪ که در این معادله، توابع p, q و r در محدوده a تا b پیوسته بوده و هم چنین شرایط مرزی معادله فوق به شکل زیر باشد (همگن):

$$\begin{cases} B.C.1: a_1 y(a) + b_1 y'(a) = 0 \\ B.C.2: a_2 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

▪ آن گاه چنان چه φ_1 تا φ_n جواب های معادله به ازای λ_1 تا λ_n باشند، مجموعه $\{\varphi_n(x)\}$ نسبت به تابع وزن $r(x)$ در محدوده a تا b یک مجموعه متعامد را تشکیل می دهد. به عبارت دیگر

$$\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) r(x) dx \begin{cases} = 0 & n \neq m \\ \neq 0 & n = m \end{cases}$$

خاصیت تعامد تابع بسل J

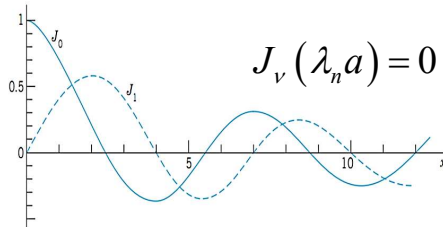
■ حالت اول

$$y(x) = C_1 J_\nu(\lambda x) + C_2 Y_\nu(\lambda x)$$

$$B.C.1: \quad x=0 \quad ; \quad y(0) = \text{finite} \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y(x) = C_1 J_\nu(\lambda x) + C_2 Y_\nu(\lambda x)$$

$$B.C.2: \quad x=a \quad ; \quad y(a) = 0 \Rightarrow J_\nu(\lambda a) = 0$$



■ این معادله به ازای n مقدار جواب خواهد داشت که به این مقادیر (λ_n) ، مقادیر ویژه گفته می شود.

$$\{J_\nu(\lambda_n x)\} \quad \text{توابع ویژه}$$

$$\int_0^a J_\nu(\lambda_n x) J_\nu(\lambda_m x) x dx \begin{cases} = 0 & ; \quad n \neq m \\ = a^2/2 J_{\nu+1}^2(\lambda_n a) & ; \quad n = m \end{cases} \quad (105)$$

خاصیت تعامد تابع بسل J

■ حالت دوم

$$y(x) = C_1 J_\nu(\lambda x) + C_2 Y_\nu(\lambda x)$$

$$B.C.1: \quad x=0 \quad ; \quad y(0) = \text{finite} \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y(x) = C_1 J_\nu(\lambda x) + C_2 Y_\nu(\lambda x)$$

$$B.C.2: \quad x=a \quad ; \quad y'(a) = 0 \Rightarrow J'_\nu(\lambda a) = 0$$

■ این معادله نیز به ازای n مقدار جواب خواهد داشت که به این مقادیر (λ_n) ، مقادیر ویژه گفته می شود.

$$\int_0^a J_\nu(\lambda_n x) J_\nu(\lambda_m x) x dx \begin{cases} = 0 & ; \quad n \neq m \\ \frac{\lambda_n^2 a^2 - \nu^2}{2\lambda_n^2} J_\nu^2(\lambda_n a) & ; \quad n = m \end{cases}$$

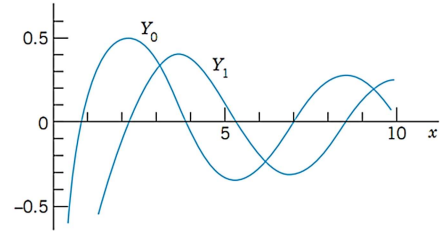
خاصیت تعامد تابع بسل J

$$y(x) = C_1 J_\nu(\lambda x) + C_2 Y_\nu(\lambda x)$$

■ حالت سوم

$$B.C.1: \quad x=0 \quad ; \quad y(0) = finite \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y(x) = C_1 J_\nu(\lambda x) + C_2 Y_\nu(\lambda x)$$



$$B.C.2: \quad x=a \quad ; \quad y'(a) + h y(a) = 0 \Rightarrow J'_\nu(\lambda a) + h J_\nu(\lambda a) = 0$$

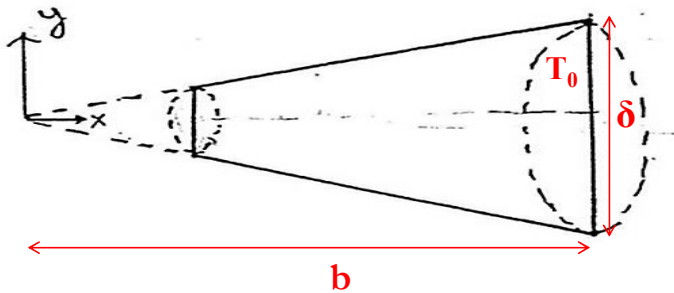
■ این معادله به ازای n مقدار جواب خواهد داشت که به این مقادیر (λ_n) ، مقادیر ویژه گفته می شود.

$$\int_0^a J_\nu(\lambda_n x) J_\nu(\lambda_m x) x dx \begin{cases} = 0 & ; \quad n \neq m \\ \frac{(\lambda_n^2 + h^2) a^2 - \nu^2}{2\lambda_n^2} J_\nu^2(\lambda_n a) & ; \quad n = m \end{cases}$$

107

پره مخروطی

■ یک پره مخروطی به شکل زیر را در نظر بگیرید. با فرض طولانی و نازک بودن پره $(b \gg \delta)$ ، توزیع دمای آن را در حالت پایا به دست آورید. دمای پایه برابر با T_0 بوده و پره در معرض محیطی با دمای T_∞ قرار دارد.

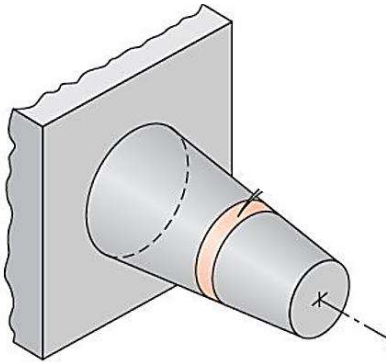


حل: ابتدا باید به کمک مدل سازی معادله دیفرانسیل مربوط به پره به دست آید.

108

پره مخروطی

در جهت x مدل سازی توزیع شده و در جهت y به صورت Lumped:



۱- انتخاب المان

۲- انتخاب قانون کلی:
موازنه حرارتی

۳- فرضیات مورد استفاده:
حالت پایا

ضریب انتقال حرارت هدایتی (k) ثابت

۴- نوشتن موازنه

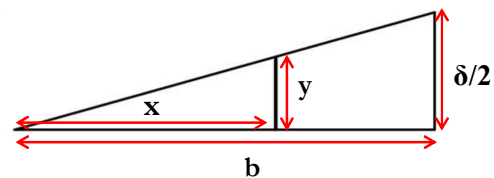
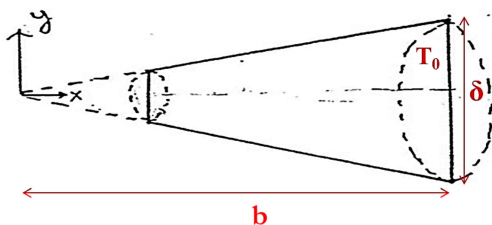
$$accumulation = input - output + generation - consumption$$

$$\Rightarrow input - output = 0 \Rightarrow (q_{cond} \cdot A_c)_x - (q_{cond} \cdot A_c)_{x+\Delta x} - q_{conv} dA_s = 0$$

109

پره مخروطی

با استفاده از قضیه تشابه مثلث ها می توان نوشت



$$\frac{\delta/2}{y} = \frac{b}{x} \Rightarrow y = \frac{\delta}{2b} x$$

$$A_c(y) = \Rightarrow A_c(x) =$$

$$p(y) = \Rightarrow p(x) =$$

■ قبلاً داشتیم

$$(q_{cond} \cdot A_c)_x - (q_{cond} \cdot A_c)_{x+\Delta x} - q_{conv} dA_s = 0 \Rightarrow (q_{cond} \cdot A_c)_x - (q_{cond} \cdot A_c)_{x+\Delta x} - q_{conv} (p(x) \cdot \Delta x) = 0$$

■ با تقسیم کل عبارت بر Δx و وقتی $\Delta x \rightarrow 0$

$$\Rightarrow -\frac{d(q_{cond} \cdot A_c)}{dx} - q_{conv} p(x) = 0$$

110

پره مخروطی

۵- تبدیل متغیرهای کلی به متغیر عملیاتی با استفاده از قوانین خاص

$$-\frac{d(q_{cond} \cdot A_c)}{dx} - q_{conv} p(x) = 0 \quad q_{cond} = -k \frac{dT}{dx} \quad q_{conv} = h(T - T_\infty)$$

در نتیجه

$$\Rightarrow -\frac{d}{dx} \left(-k \frac{dT}{dx} \cdot \left(\pi \frac{\delta^2}{4b^2} x^2 \right) \right) - h(T - T_\infty) \frac{\pi \delta}{b} x = 0$$

با مرتب کردن معادله خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dT}{dx} \right) - \frac{4bh}{\delta k} x(T - T_\infty) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dT}{dx} \right) - m^2 x(T - T_\infty) = 0$$

۶- تعیین شرایط مرزی و اولیه



پره مخروطی

پس از به دست آوردن معادله دیفرانسیل، حال باید این معادله حل شده و توزیع دمایی به دست آید:

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dT}{dx} \right) - m^2 x(T - T_\infty) = 0 \Rightarrow x^2 \frac{d^2 T}{dx^2} + 2x \frac{dT}{dx} - m^2 x(T - T_\infty) = 0$$

$$\begin{cases} B.C.1: x = 0 & ; \quad T = \\ B.C.2: x = b & ; \quad T = \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل به دست آمده ناهمگن بوده و با استفاده از یک تغییر متغیر ساده، می توان فرم ناهمگن را به فرم همگن تبدیل کرد:

$$T(x) - T_\infty = \theta(x) \Rightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{d\theta}{dx} ; \quad \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{d^2 \theta}{dx^2}$$

$$\begin{cases} B.C.1: x = 0 & ; \quad T(0) - T_\infty = \\ B.C.2: x = b & ; \quad T(b) - T_\infty = \end{cases}$$

با مقایسه با فرم عمومی معادله بسل می توان گفت

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (2p+1)x \frac{dy}{dx} + (\beta^2 x^{2r} - \alpha^2)y = 0 \quad (r \neq 0)$$



پره مخروطی

پس از به دست آوردن معادله دیفرانسیل، حال باید این معادله حل شده و توزیع دمایی به دست آید:

$$p = \quad ; \quad r = \quad ; \quad \alpha = \quad ; \quad q^2 = p^2 + \alpha^2 \Rightarrow q = \quad$$

$$\beta^2 =$$

یادآوری: جواب معادله بسل عمومی به شکل زیر است

$$y(x) = x^{-p} \left[c_1 J_{\frac{q}{r}} \left(\beta \frac{x^r}{|r|} \right) + c_2 Y_{\frac{q}{r}} \left(\beta \frac{x^r}{|r|} \right) \right]$$

از آن جا که مقادیر β برحسب m به فرم موهومی به دست آمده اند، از توابع I و K استفاده می کنیم:

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[c_1 I_1(2m\sqrt{x}) + c_2 K_1(2m\sqrt{x}) \right]$$

با اعمال شرط مرزی اول

$$B.C.1: x=0 \quad ; \quad \theta(0) = finite \Rightarrow c_2 =$$

پره مخروطی

و با اعمال شرط مرزی دوم خواهیم داشت

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[c_1 I_1(2m\sqrt{x}) \right]$$

$$B.C.2: x=b \quad ; \quad \theta(b) = \theta_0$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{\sqrt{b}}{I_1(2m\sqrt{b})} \theta_0$$

با جایگذاری c_1 در معادله توزیع دما داریم:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \sqrt{\frac{b}{x}} \cdot \frac{I_1(2m\sqrt{x})}{I_1(2m\sqrt{b})}$$

این رابطه، معادله نهایی توزیع دما در پره مخروطی می باشد.

معادله لژاندر

جواب های این معادله تشکیل یک مجموعه متعامد را می دهند

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \quad n \text{ یک عدد صحیح می باشد}$$

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{n(n+1)}{1-x^2}y = 0 \quad \text{با تبدیل معادله داریم}$$

نقطه $x_0=0$ یک نقطه عادی برای این معادله است و در نتیجه جواب معادله را به صورت سری توانی

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{در نظر می گیریم. با مشتق گیری و قرار دادن در معادله داریم:}$$

$$y(x) = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x) \quad \circ \text{ جواب های } Q_n \text{ برای } |x| < 1 \text{ تعریف شده می باشند.}$$

$$P_0 = 1 \quad Q_0 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{به کمک سری های توانی، مقادیر } P_n \text{ و } Q_n \text{ ها}$$

$$P_1 = x \quad Q_1 = \frac{x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad Q_3 = \dots\dots$$

115

معادله لژاندر

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0 \quad \text{با تبدیل معادله لژاندر به فرم } S-L \text{ داریم:}$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \beta r(x)]y(x) = 0 \quad \text{با مقایسه با فرم عمومی معادله } S-L \text{ می توان گفت}$$

$$p(x) = 1-x^2 \quad \beta = n(n+1) \quad r(x) = 1 \quad q(x) = 0$$

از خاصیت تعامد معادله لژاندر در سیستم های کروی استفاده می شود. در صورتی که کره کامل باشد (شامل ۱ و -۱)، Q_n جزو جواب نبوده (به دلیل عبارت های $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ در Q_n) و در صورتی که کره ناقص داشته باشیم Q_n هم جزو جواب خواهد بود.

$$y(x) = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x)$$

با داشتن شرط مرزی های زیر داریم

$$\begin{cases} B.C.1: x=1 & ; \quad y(1) = \text{finite} \\ B.C.2: x=-1 & ; \quad y(-1) = \text{finite} \end{cases} \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 P_n(x)$$

116

معادله لژاندر

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx \begin{cases} = 0 & n \neq m \\ = \frac{2}{2n+1} & n = m \end{cases} \quad \text{به علاوه داریم}$$

با تغییر متغیر $x = \cos \theta$ در معادله لژاندر خواهیم داشت

$$x = \cos \theta \Rightarrow \frac{d^2 y}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dy}{d\theta} + n(n+1)y = 0$$

و خاصیت تعامد برای این معادله نیز به فرم زیر خواهد بود

$$\int_{-1}^1 P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \begin{cases} = 0 & n \neq m \\ = \frac{2}{2n+1} & n = m \end{cases}$$

معادله شبه لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[-\frac{m^2}{1-x^2} + n(n+1) \right] y = 0 \quad \text{معادله به شکل مقابل}$$

که نقطه $x_0=0$ یک نقطه عادی برای این معادله بوده و به کمک سری توانی $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب های معادله شبه لژاندر به صورت زیر به دست می آیند:

$$y(x) = c_1 P_n^{(m)}(x) + c_2 Q_n^{(m)}(x)$$

از جواب های معادله لژاندر، جواب های معادله شبه لژاندر به شکل زیر به دست می آیند:

$$\begin{cases} P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n}{dx^m} \\ Q_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m Q_n}{dx^m} \quad ; \quad |x| < 1 \end{cases}$$

معادله شبه لژاندر

و خاصیت تعامد توابع $P_n^{(m)}(x)$ به شکل زیر است

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[-\frac{m^2}{1-x^2} + n(n+1) \right] y = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \beta r(x)] y(x) = 0$$

می توان گفت

$$p(x) = 1-x^2 \quad \beta = n(n+1) \quad r(x) = 1 \quad q(x) = -\frac{m^2}{1-x^2}$$

با داشتن شرط مرزی های زیر

$$\begin{cases} B.C.1: x=1 & ; y(1) = \text{finite} \\ B.C.2: x=-1 & ; y(-1) = \text{finite} \end{cases} \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 P_n^{(m)}(x)$$

$$\int_{-1}^1 P_n^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x) dx \begin{cases} = 0 & n \neq k \\ = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} & n = k \end{cases}$$

و داریم

جمع بندی

نوع معادله	$p(x)$	$q(x)$	λ	$\omega(x)$
مثلثاتی	1	0	λ	1
بسل	x	$\frac{v^2}{x}$	β^2	x
لژاندر	$1-x^2$	0	$n(n+1)$	1
شبه لژاندر	$1-x^2$	$-\frac{m^2}{1-x^2}$	$n(n+1)$	1
هرمیت	e^{-x^2}	0	n	$2e^{-x^2}$
لاگر	$x.e^{-x}$	0	n	e^{-x}

فصل چهارم



حل معادلات دیفرانسیل پاره ای به روش تفکیک متغیرها

مقدمه

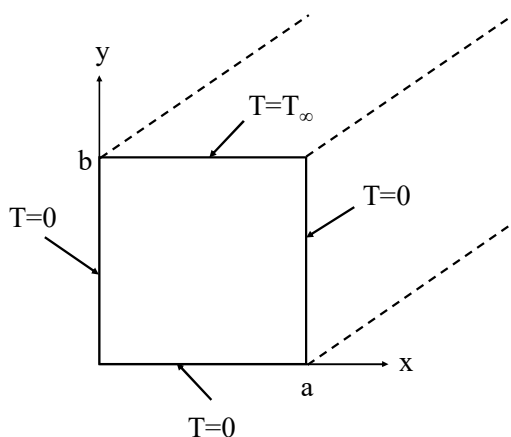
- معادلاتی که به روش تفکیک متغیرها حل می شوند باید ابتدا به فرم تفکیک پذیر باشند (معادلات به صورت خطی و همگن باشند).
- شرط دیگر این است که (برای مسئله دوبعدی) حداقل شرایط مرزی در یک بعد همگن بوده و از مسئله S-L تبعیت کند. برای مسئله سه بعدی، حداقل شرایط مرزی باید در دو بعد همگن بوده و از مسئله S-L تبعیت کند.

مثال: برای دیواره دو بعدی مقابل، در حالت پایا

تغییرات دما به چه صورت خواهد بود؟

(فرض می کنیم عمق زیاد است و انتقال حرارت

در ابعاد x و y صورت می گیرد.)



حل: ابتدا باید مدل سازی را انجام داده و سپس معادله دیفرانسیل به دست آمده را حل کنیم.

۱- انتخاب حجم کنترل

۲- انتخاب قانون کلی: موازنه حرارتی

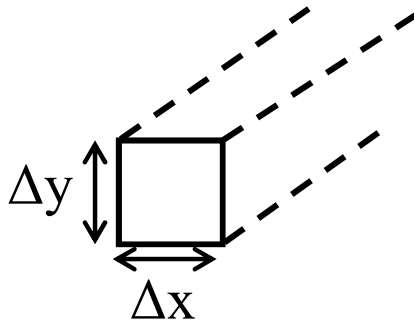
انتقال حرارت در دیواره دو بعدی

۳- فرضیات مورد استفاده

حالت پایا

ضریب انتقال حرارت هدایتی (k) ثابت

۴- نوشتن موازنه



$$\text{accumulation} = \text{input} - \text{output} + \text{generation} - \text{consumption}$$

$$\Rightarrow \text{input} - \text{output} = 0$$

$$\Rightarrow (q_{cond})_x (\Delta y.L) - (q_{cond})_{x+\Delta x} (\Delta y.L) + (q_{cond})_y (\Delta x.L) - (q_{cond})_{y+\Delta y} (\Delta x.L) = 0$$

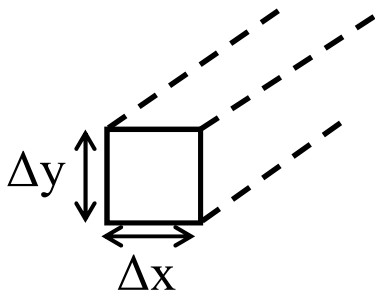
با تقسیم کل عبارت بر $\Delta x \Delta y L$ و حالتی که Δx و Δy به صفر میل کنند

$$\frac{(q_{cond})_x - (q_{cond})_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{(q_{cond})_y - (q_{cond})_{y+\Delta y}}{\Delta y} = 0 \Rightarrow -\frac{d(q_{cond})_x}{dx} - \frac{d(q_{cond})_y}{dy} = 0$$

123

انتقال حرارت در دیواره دو بعدی

۵- استفاده از قوانین خاص



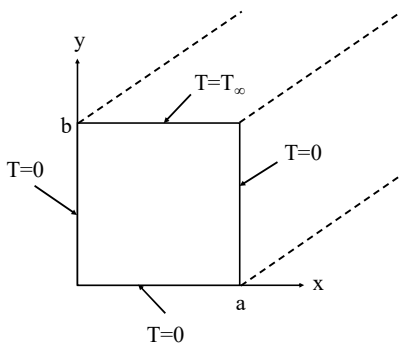
$$-\frac{d(q_{cond})_x}{dx} - \frac{d(q_{cond})_y}{dy} = 0$$

$$q_{cond} = -k \frac{dT}{dx}$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dx} \left(-k \frac{dT}{dx} \right) - \frac{d}{dy} \left(-k \frac{dT}{dy} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} = 0$$

(معادله دیفرانسیل لاپلاس)

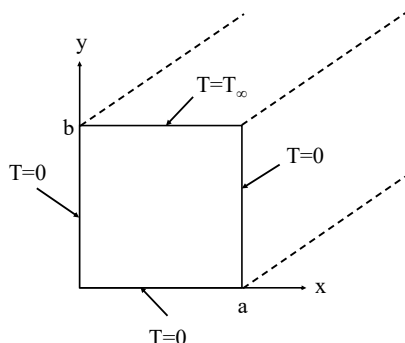
۶- شرایط مرزی و اولیه



124

روش تفکیک متغیرها

▪ مبنای روش تفکیک متغیرها را در حل معادله لاپلاس به کمک این مثال توضیح می دهیم



$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} = 0$$

▪ پاسخ معادله لاپلاس را به صورت ضرب دو تابع X و Y در نظر می گیریم

$$T(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

$$\Rightarrow Y(y) \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + X(x) \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \quad \text{or} \quad Y(y) \cdot X''(x) + X(x) \cdot Y''(y) = 0$$

▪ با تقسیم این عبارت بر $X(x) \cdot Y(y)$ داریم

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \beta$$

125

روش تفکیک متغیرها

▪ برای ثابت β ۳ حالت ممکن است وجود داشته باشد:

الف: $\beta = 0$

ب: $\beta = \lambda^2 > 0$

ج: $\beta = -\lambda^2 < 0$

هر کدام از ۳ حالت را جداگانه بررسی می کنیم:

الف: $\beta = 0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \Rightarrow X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 x + c_2$$

از طرفی

$$T(0, y) = 0 \Rightarrow X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow \left\{ \right.$$

و هم چنین

$$T(a, y) = 0 \Rightarrow X(a)Y(y) = 0 \Rightarrow \left\{ \right.$$

126

روش تفکیک متغیرها

ب: $\beta = \lambda^2 > 0$
در این حالت داریم

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda^2 \Rightarrow X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$$

$$m^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm \lambda$$

$$\Rightarrow X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x} \quad \text{or} \quad X(x) = c_1 \sinh \lambda x + c_2 \cosh \lambda x$$

می دانیم

$$\sinh \lambda x = \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2} \quad \text{and} \quad \cosh \lambda x = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}$$

مانند قبل

$$T(0, y) = 0 \Rightarrow X(0).Y(y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Y(y) = 0 & \otimes \\ X(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

$$T(a, y) = 0 \Rightarrow X(a).Y(y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Y(y) = 0 & \otimes \\ X(a) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow X(x) = 0 & \otimes \end{cases}$$

127

روش تفکیک متغیرها

ج: $\beta = -\lambda^2 < 0$
در این حالت داریم

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2 \Rightarrow X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$m^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm i\lambda \Rightarrow X(x) = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x$$

مانند قبل داریم

$$T(0, y) = 0 \Rightarrow X(0).Y(y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Y(y) = 0 & \otimes \\ X(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

$$T(a, y) = 0 \Rightarrow X(a).Y(y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Y(y) = 0 & \otimes \\ X(a) = 0 \Rightarrow \sin \lambda a = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_n a = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$\Rightarrow X(x) = c_1 \sin \lambda_n x$$

در نتیجه

128

روش تفکیک متغیرها

به همین صورت برای y داریم
در این حالت داریم

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2 \Rightarrow Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$$

$$m^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm \lambda \Rightarrow Y(y) = c_3 \sinh \lambda y + c_4 \cosh \lambda y$$

مانند قبل

$$T(x, 0) = 0 \Rightarrow X(x).Y(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Y(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0 \\ X(x) = 0 \quad \otimes \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(y) = c_3 \sinh \lambda y$$

در نتیجه

$$T(x, y) = X(x).Y(y) = c_1 c_3 \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y$$

طبق اصل برهم نهی (*superposition*)، بهترین پاسخی که می تواند شرایط مساله را به بهترین شکل توصیف کند عبارتست از

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y$$

129

روش تفکیک متغیرها

اعمال شرط مرزی آخر که ناهمگن بوده و قابل تفکیک هم نیست:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y$$

$$B.C.4: y = b \quad ; \quad T(x, b) = T_{\infty} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n b = T_{\infty}$$

با استفاده از خاصیت تعامد تابع $\sin$ ، اگر طرفین معادله بالا را در $\int_0^a \sin \lambda_m x dx$ ضرب کنیم داریم:

$$\Rightarrow T_{\infty} \int_0^a \sin \lambda_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \lambda_n b \int_0^a \sin \lambda_m x \sin \lambda_n x dx$$

در نتیجه داریم

$$\Rightarrow A_n = \frac{T_{\infty} \int_0^a \sin \lambda_m x dx}{\sinh \lambda_n b \times \int_0^a \sin \lambda_m x \sin \lambda_n x dx} = \frac{T_{\infty} \int_0^a \sin \lambda_m x dx}{\sinh \lambda_n b \times \frac{a}{2}} = \frac{T_{\infty} \left[-\frac{\cos \lambda_n x}{\lambda_n} \right]_0^a}{\sinh \lambda_n b \times \frac{a}{2}}$$

130

روش تفکیک متغیرها

در نتیجه

$$A_n = \frac{2 \left[-\frac{\cos \lambda_n x}{\lambda_n} \right]_0^a}{\sinh \lambda_n b \times a} T_\infty = \frac{2 [1 - \cos n\pi]}{\lambda_n \times a \times \sinh \lambda_n b} T_\infty = \frac{2 [1 - (-1)^n]}{\lambda_n \times a \times \sinh \lambda_n b} T_\infty$$

و در نهایت می توان نوشت

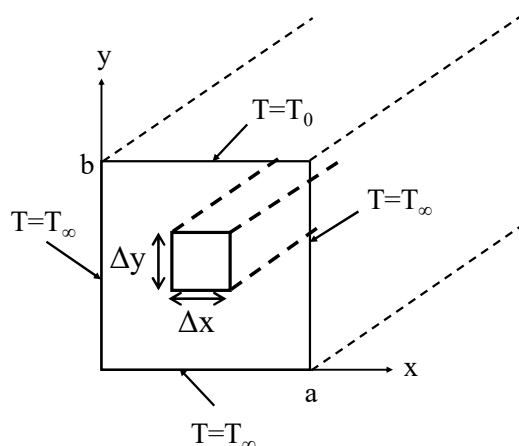
$$\frac{T(x, y)}{T_\infty} = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{\lambda_n \times \sinh \lambda_n b} \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a}$$

روش تفکیک متغیرها

به طور کلی، ثابت تفکیک را به گونه ای انتخاب می کنیم تا در جهتی که شرایط مرزی همگن است (شرایط مسئله $S-L$)، مسئله به فرم $S-L$ در بیاید. به عبارت ساده تر، در جهت همگن، مسئله دارای بی نهایت جواب به ازای $n=1, 2, \dots, \infty$ (مقادیر ویژه و توابع ویژه) باشد.

مثال: برای دیواره دو بعدی مقابل، در حالت پایا تغییرات دما به چه صورت خواهد بود؟

حل: پس از مدل سازی خواهیم داشت



$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} = 0$$

روش تفکیک متغیرها

برای همگن کردن معادله (حداقل در یک بعد)، تغییر متغیر $\theta(x, y) = T(x, y) - T_\infty$ را اعمال می کنیم. در نتیجه

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d^2\theta}{dy^2} = 0 \quad \begin{cases} B.C.1: x=0 & ; \quad \theta(0, y) = \\ B.C.2: x=a & ; \quad \theta(a, y) = \\ B.C.3: y=0 & ; \quad \theta(x, 0) = \\ B.C.4: y=b & ; \quad \theta(x, b) = \end{cases} \quad \text{بعد همگن؟؟؟}$$

حال می توان از روش تفکیک متغیرها استفاده کرد

$$\theta(x, y) = X(x).Y(y) \Rightarrow Y(y).X''(x) + X(x).Y''(y) = 0$$

با تقسیم این عبارت بر $X(x).Y(y)$ داریم

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \beta \Rightarrow \begin{cases} X'' - \beta X = 0 \\ Y'' + \beta Y = 0 \end{cases}$$

با توجه به این که بعد همگن است، $\beta = -\lambda^2$ خواهد بود:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \Rightarrow m^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm i\lambda \Rightarrow X(x) = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x$$

133

روش تفکیک متغیرها

حال باید شرایط مرزی در جهت x را تفکیک کنیم

$$B.C.1: T(0, y) = T_\infty \Rightarrow T(0, y) - T_\infty = T_\infty - T_\infty = 0 \Rightarrow \theta(0, y) = 0$$

$$\Rightarrow X(0).Y(y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Y(y) = 0 & \otimes \\ X(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 \sin \lambda x \end{cases}$$

$$B.C.2: T(a, y) = T_\infty \Rightarrow T(a, y) - T_\infty = T_\infty - T_\infty = 0 \Rightarrow \theta(a, y) = 0$$

$$\Rightarrow X(a).Y(y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Y(y) = 0 & \otimes \\ X(a) = 0 \Rightarrow \sin \lambda a = 0 \Rightarrow \lambda_n a = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{a} \end{cases}$$

در نتیجه

$$\Rightarrow X(x) = c_1 \sin \lambda_n x$$

134

روش تفکیک متغیرها

به همین صورت برای y داریم

$$Y'' + \beta Y = 0 \Rightarrow Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$$

در نتیجه

$$m^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm \lambda \Rightarrow Y(y) = c_3 \sinh \lambda y + c_4 \cosh \lambda y$$

تفکیک شرط مرزی در جهت y

$$B.C.3: T(x, 0) = T_\infty \Rightarrow T(x, 0) - T_\infty = T_\infty - T_\infty = 0 \Rightarrow \theta(x, 0) = 0$$

$$\Rightarrow X(x).Y(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Y(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0 \\ X(x) = 0 \quad \otimes \end{cases}$$

در نتیجه

$$\Rightarrow Y(y) = c_3 \sinh \lambda y \Rightarrow \theta(x, y) = X(x).Y(y) = c_1 c_3 \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y$$

طبق اصل برهم نهی (*superposition*)، بهترین پاسخی که می تواند شرایط مساله را به بهترین شکل توصیف کند عبارتست از

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y$$

135

روش تفکیک متغیرها

اعمال شرط مرزی آخر که ناهمگن بوده و قابل تفکیک هم نیست:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y$$

$$B.C.4: y = b \quad ; \quad \theta(x, b) = \theta_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n b = \theta_0$$

با استفاده از خاصیت تعامد تابع $\sin$ ، اگر طرفین معادله بالا را در $\int_0^a \sin \lambda_m x dx$ ضرب کنیم داریم:

$$\Rightarrow \theta_0 \int_0^a \sin \lambda_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \lambda_n b \int_0^a \sin \lambda_m x \sin \lambda_n x dx$$

در نتیجه داریم

$$\Rightarrow A_n = \frac{\theta_0 \int_0^a \sin \lambda_m x dx}{\sinh \lambda_n b \times \int_0^a \sin \lambda_m x \sin \lambda_n x dx} = \frac{\theta_0 \int_0^a \sin \lambda_m x dx}{\sinh \lambda_n b \times \frac{a}{2}} = \frac{\theta_0 \left[-\frac{\cos \lambda_n x}{\lambda_n} \right]_0^a}{\sinh \lambda_n b \times \frac{a}{2}}$$

136

روش تفکیک متغیرها

در نتیجه

$$A_n = \frac{2 \left[-\frac{\cos \lambda_n x}{\lambda_n} \right]_0^a}{\sinh \lambda_n b \times a} \theta_0 = \frac{2 [1 - \cos n\pi]}{\lambda_n \times a \times \sinh \lambda_n b} \theta_0 = \frac{2 [1 - (-1)^n]}{\lambda_n \times a \times \sinh \lambda_n b} \theta_0$$

و در نهایت می توان نوشت

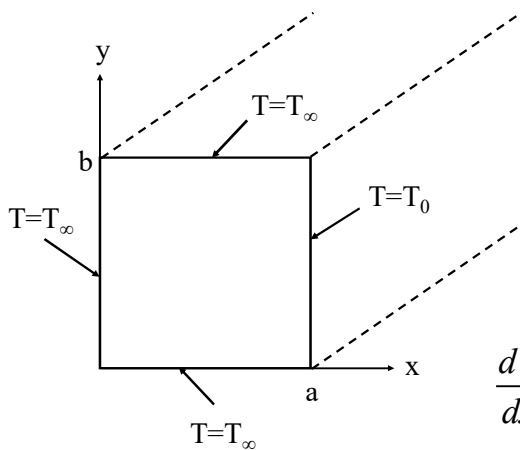
$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = \frac{T(x, y) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{\lambda_n \times \sinh \lambda_n b} \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a}$$

137

روش تفکیک متغیرها

مثال: برای دیواره دو بعدی مقابل، در حالت پایا تغییرات دما به چه صورت خواهد بود؟

حل: پس از مدل سازی



$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} = 0$$

$$\begin{cases} B.C.1: x=0 & ; & T(0, y) = \\ B.C.2: x=a & ; & T(a, y) = \\ B.C.3: y=0 & ; & T(x, 0) = \\ B.C.4: y=b & ; & T(x, b) = \end{cases}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{d^2 \theta}{dy^2} = 0 \quad \begin{cases} B.C.1: x=0 & ; & \theta(0, y) = \\ B.C.2: x=a & ; & \theta(a, y) = \\ B.C.3: y=0 & ; & \theta(x, 0) = \\ B.C.4: y=b & ; & \theta(x, b) = \end{cases}$$

بعد همگن؟؟؟

138

روش تفکیک متغیرها

در نتیجه y بعد همگن و x بعد ناهمگن خواهد بود.

خواهیم داشت

$$A_n = \frac{2 \left[-\frac{\cos \lambda_n y}{\lambda_n} \right]_0^b}{\sinh \lambda_n a \times b} \theta_0 = \frac{2 [1 - \cos n\pi]}{\lambda_n \times b \times \sinh \lambda_n a} \theta_0 = \frac{2 [1 - (-1)^n]}{\lambda_n \times b \times \sinh \lambda_n a} \theta_0$$

و در نهایت می توان نوشت

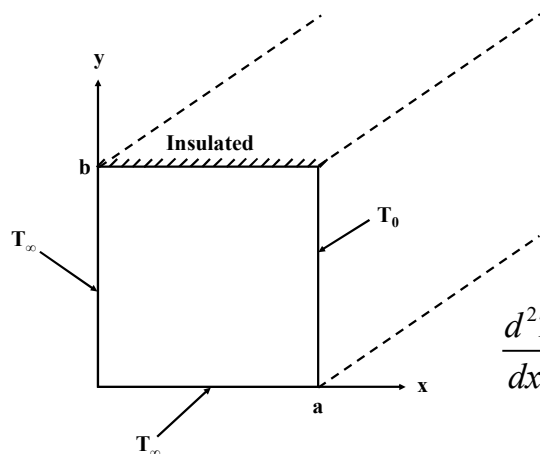
$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = \frac{T(x, y) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{\lambda_n \times \sinh \lambda_n a} \sinh \lambda_n x \sin \lambda_n y \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{b}$$

139

روش تفکیک متغیرها

مثال: برای دیواره دو بعدی مقابل، در حالت پایا تغییرات دما به چه صورت خواهد بود؟

حل: پس از مدل سازی



$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B.C.1: x = 0 \quad ; \quad T(0, y) = \\ B.C.2: x = a \quad ; \quad T(a, y) = \\ B.C.3: y = 0 \quad ; \quad T(x, 0) = \\ B.C.4: y = b \quad ; \end{array} \right.$$

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{d^2 \theta}{dy^2} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B.C.1: x = 0 \quad ; \quad \theta(0, y) = \\ B.C.2: x = a \quad ; \quad \theta(a, y) = \\ B.C.3: y = 0 \quad ; \quad \theta(x, 0) = \\ B.C.4: y = b \quad ; \end{array} \right.$$

بعد همگن؟؟؟

140

روش تفکیک متغیرها

حال می توان از روش تفکیک متغیرها استفاده کرد

$$\theta(x, y) = X(x).Y(y) \Rightarrow Y(y).X''(x) + X(x).Y''(y) = 0$$

با تقسیم این عبارت بر $X(x).Y(y)$ داریم

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \beta \Rightarrow \begin{cases} X'' - \beta X = 0 \\ Y'' + \beta Y = 0 \end{cases}$$

با توجه به این که y بعد همگن است، $\beta = \lambda^2$ خواهد بود:

$$Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0 \Rightarrow m^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm i\lambda \Rightarrow Y(y) = c_1 \sin \lambda y + c_2 \cos \lambda y$$

حال تفکیک شرایط مرزی در جهت y

$$B.C.3: \theta(x, 0) = 0$$

$$\Rightarrow X(x).Y(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow Y(y) = c_1 \sin \lambda y \\ X(x) = 0 \quad \otimes \end{cases}$$

141

روش تفکیک متغیرها

شرط مرزی دوم در جهت y

$$B.C.4: y = b \quad ; \quad \frac{\partial \theta(x, b)}{\partial y} = 0 \Rightarrow X(x).Y'(b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X(x) = 0 \quad \otimes \\ Y'(b) = 0 \end{cases}$$

$$Y(y) = c_1 \sin \lambda y \Rightarrow Y'(y) = c_1 \lambda \cos \lambda y \Rightarrow Y'(b) = c_1 \lambda \cos \lambda b = 0 \Rightarrow \cos \lambda b = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_n b = \frac{(2n+1)\pi}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2b}$$

در بعد x (بعد ناهمگن) نیز داریم

$$\Rightarrow X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$$

$$m^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm \lambda \Rightarrow X(x) = c_3 \sinh \lambda x + c_4 \cosh \lambda x$$

تفکیک شرط مرزی در جهت x

$$B.C.1: \theta(0, y) = 0 \Rightarrow X(0).Y(y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Y(y) = 0 \quad \otimes \\ X(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0 \end{cases}$$

142

روش تفکیک متغیرها

در نتیجه

$$\Rightarrow X(x) = c_3 \sinh \lambda x \Rightarrow \theta(x, y) = X(x).Y(y) = c_1 c_3 \sinh \lambda_n x \sin \lambda_n y$$

طبق اصل برهم نهی (*superposition*)، بهترین پاسخی که می تواند شرایط مساله را به بهترین شکل توصیف کند عبارتست از

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \lambda_n x \sin \lambda_n y \quad \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2b}$$

اعمال شرط مرزی آخر که ناهمگن بوده و قابل تفکیک هم نیست:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \lambda_n x \sin \lambda_n y$$

$$B.C.2: x = a \quad ; \quad \theta(a, y) = \theta_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \lambda_n a \sin \lambda_n y = \theta_0$$

با استفاده از خاصیت تعامد تابع $\sin$ ، اگر طرفین معادله بالا را در $\int_0^b \sin \lambda_m y dy$ ضرب کنیم داریم:

$$\Rightarrow \theta_0 \int_0^b \sin \lambda_m y dy = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \lambda_n a \int_0^b \sin \lambda_m y \sin \lambda_n y dy$$

143

روش تفکیک متغیرها

در نتیجه داریم

$$\Rightarrow A_n = \frac{\theta_0 \int_0^b \sin \lambda_m y dy}{\sinh \lambda_n a \times \int_0^b \sin \lambda_m y \sin \lambda_n y dy} = \frac{\theta_0 \int_0^b \sin \lambda_m y dy}{\sinh \lambda_n a \times \frac{b}{2}} = \frac{\theta_0 \left[-\frac{\cos \lambda_n y}{\lambda_n} \right]_0^b}{\sinh \lambda_n a \times \frac{b}{2}}$$

در نتیجه

$$A_n = \frac{2}{\lambda_n \times b \times \sinh \lambda_n a} \theta_0$$

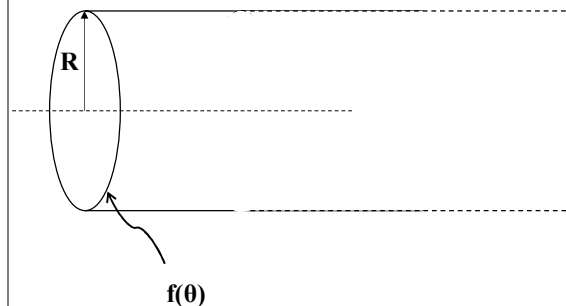
و در نهایت می توان نوشت

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = \frac{T(x, y) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \times \sinh \lambda_n a} \sinh \lambda_n x \sin \lambda_n y \quad \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2b}$$

144

استوانه با طول زیاد

مثال: برای استوانه توپُر با شعاع R و طول زیاد، تابعیت دما بر روی دیواره تابعی از θ می باشد. توزیع دما در استوانه را در حالت پایا به دست آورید.



حل: ابتدا لازم است به کمک مدلسازی، معادله دیفرانسیل مربوط به دما به دست آید.

چون طول استوانه زیاد است از انتقال حرارت در جهت طول صرف نظر می کنیم ($\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$). پس انتقال حرارت در جهت r و θ خواهد بود:

$$T = T(r, \theta)$$

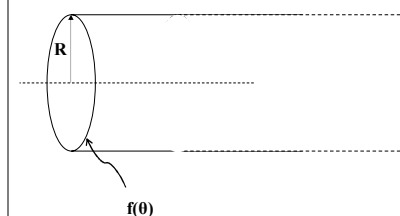
پس از مدلسازی، به معادله لاپلاس در مختصات استوانه ای می رسم:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$$

145

استوانه با طول زیاد

نکته مهم: در طول مدلسازی، از قوانین خاص زیر باید استفاده شود:



$$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r} \qquad q_\theta = -k \frac{\partial T}{\partial s} = -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

مرحله آخر مدلسازی، تعیین شرایط مرزی و اولیه می باشد

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\begin{cases} B.C.1: r=0 & ; & T(0, \theta) = \\ B.C.2: r=R & ; & T(R, \theta) = \\ B.C.3: & & \\ B.C.4: & & \end{cases}$$

بعد همگن؟؟؟

با استفاده از روش تفکیک متغیرها داریم

$$T(r, \theta) = R(r) \cdot \Gamma(\theta) \Rightarrow \Gamma(\theta) \cdot R''(r) + \frac{1}{r} \Gamma(\theta) \cdot R'(r) + \frac{1}{r^2} R(r) \cdot \Gamma''(\theta) = 0$$

146

استوانه با طول زیاد

با ضرب عبارت به دست آمده در r^2 و تقسیم بر $R(r) \cdot \Gamma(\theta)$ داریم:

$$\Gamma(\theta) \cdot R''(r) + \frac{1}{r} \Gamma(\theta) \cdot R'(r) + \frac{1}{r^2} R(r) \cdot \Gamma''(\theta) = 0 \xrightarrow[\div \Gamma(\theta) \cdot R(r)]{\times r^2} r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{\Gamma''(\theta)}{\Gamma(\theta)} = 0$$

$$\Rightarrow r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = - \frac{\Gamma''(\theta)}{\Gamma(\theta)} = \beta$$

$$\Gamma'' + \lambda^2 \Gamma = 0 \Rightarrow m^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm i\lambda \Rightarrow \Gamma(\theta) = c_1 \sin \lambda \theta + c_2 \cos \lambda \theta$$

حال باید تفکیک شرایط مرزی در جهت θ انجام گیرد:

$$B.C.3: T(r, \theta) = T(r, 2\pi + \theta)$$

$$\Rightarrow R(r) \cdot \Gamma(\theta) = R(r) \cdot \Gamma(2\pi + \theta) \Rightarrow \Gamma(\theta) = \Gamma(2\pi + \theta)$$

$$B.C.4: \frac{\partial T(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial T(r, 2\pi + \theta)}{\partial \theta}$$

$$\Rightarrow R(r) \cdot \Gamma'(\theta) = R(r) \cdot \Gamma'(2\pi + \theta) \Rightarrow \Gamma'(\theta) = \Gamma'(2\pi + \theta)$$

147

استوانه با طول زیاد

با اعمال شرط ۳ و ۴ در جواب داریم

$$\begin{cases} B.C.3: c_1 \sin \lambda \theta + c_2 \cos \lambda \theta = c_1 \sin \lambda (2\pi + \theta) + c_2 \cos \lambda (2\pi + \theta) \\ B.C.4: c_1 \lambda \cos \lambda \theta - c_2 \lambda \sin \lambda \theta = c_1 \lambda \cos \lambda (2\pi + \theta) - c_2 \lambda \sin \lambda (2\pi + \theta) \end{cases}$$

از هر دو معادله فوق یک نتیجه حاصل می شود:

$$\lambda_n = n \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \Gamma(\theta) = c_1 \sin n\theta + c_2 \cos n\theta$$

حال حل معادله در جهت r :

$$r^2 R'' + r R' - \lambda^2 R = 0 \xrightarrow{Euler Eq.} m^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow R(r) = c_3 r^\lambda + c_4 r^{-\lambda}$$

تفکیک شرایط مرزی در جهت r :

$$B.C.1: r = 0 \quad ; \quad T(0, \theta) = finite \Rightarrow R(0) \cdot \Gamma(\theta) = finite \Rightarrow R(0) = finite$$

148

استوانه با طول زیاد

با اعمال شرط ۱ داریم

$$\begin{cases} R(r) = c_3 r^\lambda + c_4 r^{-\lambda} \\ B.C.1: R(0) = \text{finite} \end{cases} \Rightarrow c_4 = 0 \Rightarrow R(r) = c_3 r^\lambda = c_3 r^n$$

با توجه به اصل برهم نهی، بهترین جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$T(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta)$$

اعمال شرط مرزی آخر که ناهمگن بوده و قابل تفکیک هم نیست:

$$B.C.2: r = R \quad ; \quad T(R, \theta) = f(\theta) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta) = f(\theta)$$

با استفاده از خاصیت تعامد تابع $\sin$ ، اگر طرفین معادله بالا را در $\int_0^{2\pi} \sin m\theta d\theta$ ضرب کنیم، ضریب A_n به شکل زیر به دست می آید:

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin m\theta d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} R^n \left(A_n \int_0^{2\pi} \sin m\theta \sin n\theta d\theta + B_n \int_0^{2\pi} \sin m\theta \cos n\theta d\theta \right)$$

149

استوانه با طول زیاد

با استفاده از خاصیت تعامد تابع $\cos$ ، اگر طرفین معادله بالا را در $\int_0^{2\pi} \cos m\theta d\theta$ ضرب کنیم، ضریب B_n به شکل زیر به دست می آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta) = f(\theta)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos m\theta d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} R^n \left(A_n \int_0^{2\pi} \cos m\theta \sin n\theta d\theta + B_n \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta \right)$$

پس برای A_n و B_n به ترتیب می توان نوشت:

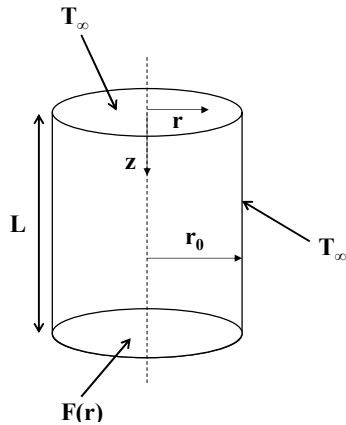
$$\int_0^{2\pi} \sin^2 n\theta d\theta = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow A_n = \frac{\int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta}{R^n \cdot \pi}$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta}{R^n \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta d\theta} \Rightarrow \begin{cases} B_0 = \frac{\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta}{2\pi} \\ B_n = \frac{\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta}{R^n \cdot \pi} \end{cases}$$

150

استوانه متقارن

مثال: برای استوانه متقارن توپر زیر با شعاع r_0 ، دمای سطح پایینی استوانه تابعی از r می باشد. توزیع دما در استوانه را در حالت پایا به دست آورید.



حل: ابتدا لازم است به کمک مدل سازی، معادله دیفرانسیل مربوط به دما به دست آید.

به دلیل تقارن استوانه، انتقال حرارت در جهت r و z خواهد بود:

$$T = T(r, z)$$

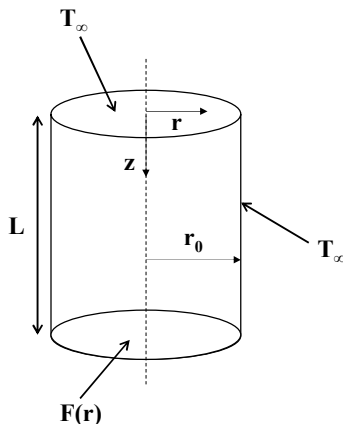
پس از مدل سازی، به معادله لاپلاس در مختصات استوانه ای می رسیم:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

151

استوانه متقارن

نکته مهم: در طول مدل سازی، از قوانین خاص زیر باید استفاده شود:



$$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

مرحله آخر مدل سازی، تعیین شرایط مرزی و اولیه می باشد.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} B.C.1: r = 0 \quad ; \quad T(0, z) = \\ B.C.2: r = r_0 \quad ; \quad T(r_0, z) = \\ B.C.3: z = 0 \quad ; \quad T(r, 0) = \\ B.C.4: z = L \quad ; \quad T(r, L) = \end{array} \right.$$

بعد همگن؟؟؟

152

استوانه متقارن

برای همگن کردن معادله (حداقل در یک بعد)، تغییر متغیر $\theta(r, z) = T(r, z) - T_\infty$ را اعمال می کنیم. در نتیجه

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad \begin{cases} B.C.1: r=0 & ; \quad \theta(0, z) = \\ B.C.2: r=r_0 & ; \quad \theta(r_0, z) = \\ B.C.3: z=0 & ; \quad \theta(r, 0) = \\ B.C.4: z=L & ; \quad \theta(r, L) = \end{cases}$$

بعد همگن؟؟؟

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0$$

حال می توان از روش تفکیک متغیرها استفاده کرد

$$\theta(r, z) = R(r).Z(z) \Rightarrow Z(z).R''(r) + \frac{1}{r} Z(z).R'(r) + R(r).Z''(z) = 0$$

با تقسیم این عبارت بر $R(r).Z(z)$ داریم

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0 \Rightarrow \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \beta$$

با توجه به این که r بعد همگن است، $\beta =$ خواهد بود:

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 R'' + r R' - r^2 \beta R = 0 \\ Z'' + \beta Z = 0 \end{cases}$$

153

استوانه متقارن

$$r^2 R'' + r R' + r^2 \lambda^2 R = 0 \quad \Rightarrow R(r) = c_1 J_0(\lambda r) + c_2 Y_0(\lambda r)$$

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

حال باید تفکیک شرایط مرزی انجام گیرد:

$$\begin{cases} B.C.1: r=0 & ; \quad \theta(0, z) = finite \\ B.C.2: r=r_0 & ; \quad \theta(r_0, z) = 0 \\ B.C.3: z=0 & ; \quad \theta(r, 0) = 0 \\ B.C.4: z=L & ; \quad \theta(r, L) = f(r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B.C.1: r=0 & ; \quad R(0) = finite \\ B.C.2: r=r_0 & ; \quad R(r_0) = 0 \\ B.C.3: z=0 & ; \quad Z(0) = 0 \\ B.C.4: z=L & ; \quad \theta(r, L) = f(r) \end{cases}$$

$$B.C.1: r=0 & ; \quad R(0) = finite \Rightarrow c_2 = 0 & ; \quad R(r) = c_1 J_0(\lambda r)$$

$$B.C.2: r=r_0 & ; \quad R(r_0) = 0 \Rightarrow c_1 J_0(\lambda r_0) = 0 \Rightarrow J_0(\lambda_n r_0) = 0$$

توابع ویژه

154

استوانه متقارن

حال حل معادله در جهت z :

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0$$

با اعمال شرط مرزی ۳ داریم

$$B.C.3: z=0 \quad ; \quad Z(0)=0 \Rightarrow Z(0)=c_3 \sinh 0 + c_4 \cosh 0 = 0$$

طبق اصل برهم نهی داریم

$$\theta(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) \sinh \lambda_n z$$

اعمال شرط مرزی آخر که ناهمگن بوده و قابل تفکیک هم نیست:

$$B.C.4: z=L \quad ; \quad \theta(r, L) = f(r) \Rightarrow \theta(r, L) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) \sinh \lambda_n L = f(r)$$

155

استوانه متقارن

با استفاده از خاصیت تعامد تابع بسل، اگر طرفین معادله قبل را در $\int_0^{r_0} J_0(\lambda_m r) r dr$ ضرب کنیم، ضریب A_n به شکل زیر به دست می آید:

$$\Rightarrow \int_0^{r_0} f(r) J_0(\lambda_m r) r dr = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \lambda_n L \int_0^{r_0} J_0(\lambda_n r) J_0(\lambda_m r) r dr$$

$$\int_0^a J_\nu(\lambda_n x) J_\nu(\lambda_m x) x dx \begin{cases} = 0 & ; \quad n \neq m \\ = a^2/2 J_{\nu+1}^2(\lambda_n a) & ; \quad n = m \end{cases}$$

قبلاً داشتیم

$$\Rightarrow A_n = \frac{\int_0^{r_0} f(r) J_0(\lambda_n r) r dr}{\sinh \lambda_n L \int_0^{r_0} J_0^2(\lambda_n r) r dr} = \frac{2 \int_0^{r_0} f(r) J_0(\lambda_n r) r dr}{r_0^2 J_1^2(\lambda_n r_0) \sinh \lambda_n L}$$

در نتیجه

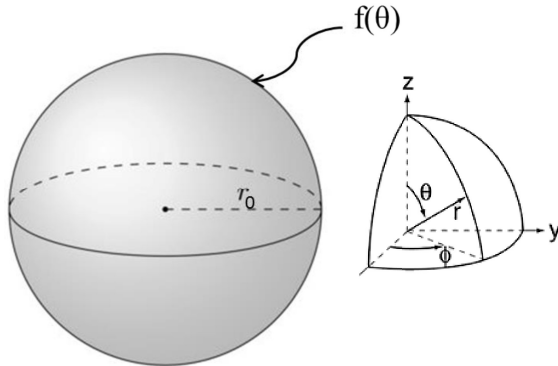
و در نهایت

$$\theta(r, z) = T(r, z) - T_\infty = \frac{2}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^{r_0} f(r) J_0(\lambda_n r) r dr}{J_1^2(\lambda_n r_0) \sinh \lambda_n L} J_0(\lambda_n r) \sinh \lambda_n z$$

156

کره نامتقارن

مثال: برای کره توپر با شعاع r_0 ، تابعیت دما بر روی سطح کره تابعی از θ می باشد. توزیع دما در کره را در حالت پایا به دست آورید.



حل: ابتدا لازم است به کمک مدلسازی، معادله دیفرانسیل مربوط به دما به دست آید.

کره در جهت ϕ متقارن است، در نتیجه انتقال حرارت در جهت r و θ خواهد بود:

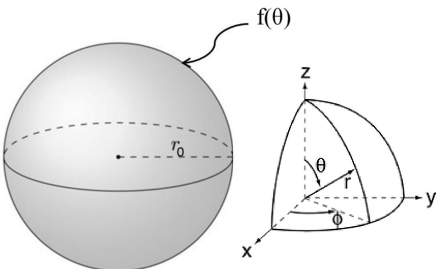
$$T = T(r, \theta)$$

پس از مدلسازی، به معادله لاپلاس در مختصات کروی می رسیم:

$$r^2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

157

کره نامتقارن



نکته مهم: در طول مدلسازی، از قوانین خاص زیر باید استفاده شود:

$$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad q_\theta = -k \frac{\partial T}{\partial s} = -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

مرحله آخر مدلسازی، تعیین شرایط مرزی و اولیه می باشد

$$r^2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} B.C.1: r=0 \quad ; \quad T(0, \theta) = \\ B.C.2: r=r_0 \quad ; \quad T(r_0, \theta) = \\ B.C.3: \theta=0 \quad ; \quad T(r, 0) = \\ B.C.4: \theta=\pi \quad ; \quad T(r, \pi) = \end{array} \right. \quad \text{بعد همگن؟؟؟}$$

با استفاده از روش تفکیک متغیرها داریم

$$T(r, \theta) = R(r) \cdot \Gamma(\theta) \Rightarrow \frac{r^2 R'' + 2r R'}{R} = - \left[\frac{\Gamma''}{\Gamma} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \right] = \beta = n(n+1)$$

158

کره نامتقارن

در نتیجه می توان نوشت

$$\frac{r^2 R'' + 2rR'}{R} = - \left[\frac{\Gamma''}{\Gamma} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \right] = n(n+1) \Rightarrow \begin{cases} \Gamma'' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Gamma' + n(n+1)\Gamma = 0 \\ r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0 \end{cases}$$

معادله به دست آمده در بعد θ معادله لژاندر و در بعد r معادله اویلر می باشد. در نتیجه:

$$\Rightarrow \Gamma(\theta) = c_1 P_n(\cos \theta) + c_2 Q_n(\cos \theta)$$

حال باید تفکیک شرایط مرزی انجام گیرد:

کره نامتقارن

حال حل معادله در جهت r :

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0 \xrightarrow{\text{Euler Eq.}} m^2 + (2-1)m - n(n+1) = 0$$

$$\Rightarrow m_1 = n \quad ; \quad m_2 = -n-1 \Rightarrow R(r) = c_3 r^n + c_4 r^{-n-1}$$

در نتیجه جواب کلی به شکل زیر خواهد بود (اصل برهم نهی):

$$T(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta)$$

با اعمال شرط مرزی ناهمگن داریم

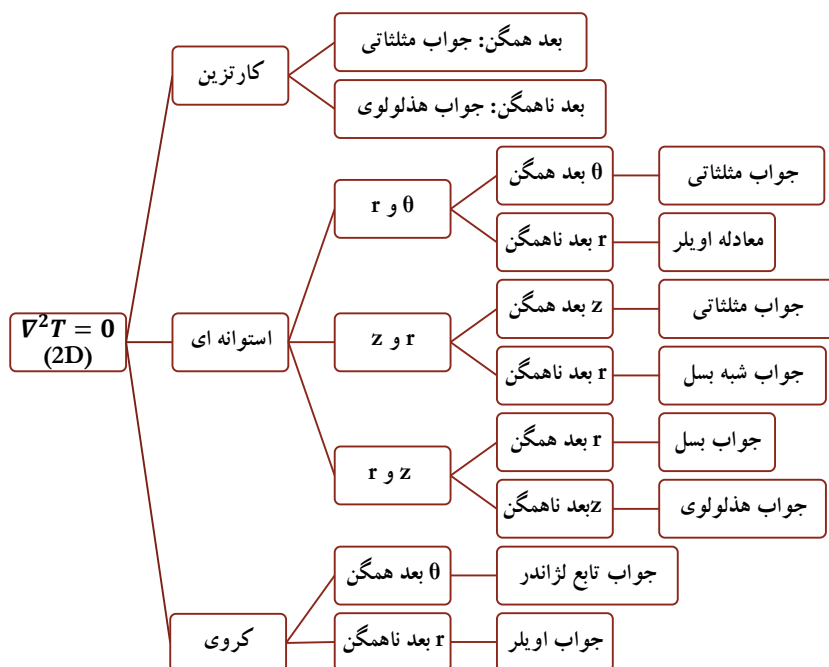
$$B.C.2: r = r_0 \quad ; \quad T(r_0, \theta) = f(\theta) \Rightarrow T(r_0, \theta) = f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_0^n P_n(\cos \theta)$$

با استفاده از خاصیت تعامد $P_n(\cos \theta)$ داریم

$$\Rightarrow a_n = \frac{\int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta}{r_0^n \int_0^{\pi} P_n^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta} = \frac{2n+1}{2r_0^n} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

معادله لاپلاس دوبعدی

با توجه به مثال های حل شده در این بخش، به طور کلی می توان نتیجه گرفت برای معادله لاپلاس دوبعدی ($\nabla^2 T = 0$)، جواب معادله دیفرانسیل می توان حالت های زیر را داشته باشد:



معادله پواسون (لاپلاس ناهمگن)

اگر معادله لاپلاس ($\nabla^2 T = 0$) را در نظر گرفته و فقط یک ترم ناهمگنی به آن اضافه شود:

$$\nabla^2 T = g(X)$$

این معادله دیفرانسیل را معادله پواسون می نامند. برای حل این معادله، مسئله را به دو مسئله مجزا (یک مسئله دو بعدی لاپلاس همگن $\nabla^2 T = 0$ و یک مسئله یک بعدی ناهمگن که براحتی قابل حل است). هر کدام از دو مسئله را جداگانه حل کرده و در انتها، جواب ها را با یکدیگر جمع می کنیم.

البته این کار همیشه امکان پذیر نیست. فرض کنیم $X = [x, y]$ باشد. سه حالت ممکن خواهد بود:

۱- حالت اول: ناهمگنی ثابت باشد ($g(X) = cte$).

در این حالت مسئله را دو قسمتی در نظر گرفته و یک قسمت تابع x و y و قسمت دیگر (ناهمگنی) تابع x یا y در نظر گرفته می شود:

$$T(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x) \quad \text{or} \quad T(x, y) = T_1(x, y) + T_2(y)$$

۲- حالت دوم: ناهمگنی تابع یکی از متغیرهای مستقل مسئله باشد. برای مثال $g = g(x)$.

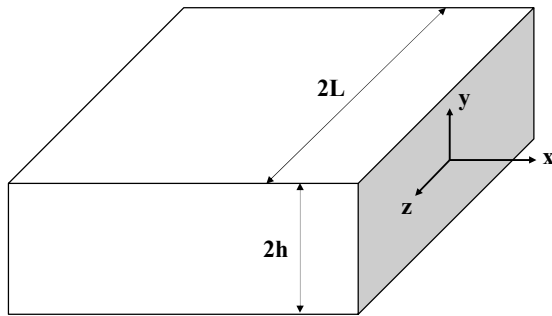
در این حالت، جواب را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$T(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x)$$

معادله پواسون (لایپلاس ناهمگن)

۳- حالت سوم این است که ناهمگنی تابع هر دو متغیر مستقل مسئله باشد ($g=g(x,y)$). در حالت کلی، این مسئله به کمک جداسازی متغیرها قابل حل نبوده و می توان به کمک تبدیل ها مانند تبدیل فوریه مسئله را حل کرد.

مثال: کانال مقابل را در نظر بگیرید. طول کانال خیلی زیاد است و در آن، آب جریان دارد. توزیع سرعت سیال در داخل کانال را به دست آورید.



حل: ابتدا باید مدلسازی انجام شود.

فرضیات: ۱- حالت پایا

۲- سیال نیوتنی

۳- طول کانال به قدری کافی است که جریان

توسعه یافته شود. پس:

$$u = u(y, z)$$

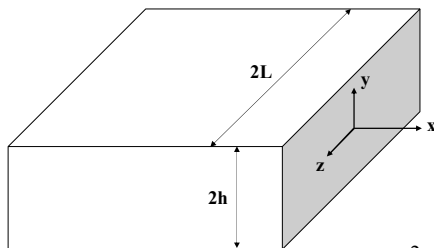
۴- جریان آرام است.

پس از مدلسازی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

163

معادله پواسون (لایپلاس ناهمگن)



از مکانیک سیالات می دانیم که در این حالت، پروفیل فشار ثابت خواهد بود. پس:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} = cte = b$$

یا به عبارت دیگر

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = b = cte$$

در نتیجه یک معادله لاپلاس ناهمگن داریم که ناهمگنی آن ثابت است (حالت اول معادله پواسون). شرایط مرزی عبارتند از:

$$\left\{ \begin{array}{l} B.C.1: y = h \quad ; \quad u(h, z) = \\ B.C.2: y = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u(0, z)}{\partial y} = \\ B.C.3: z = L \quad ; \quad u(y, L) = \\ B.C.4: z = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u(y, 0)}{\partial z} = \end{array} \right.$$

و جواب عبارتست از:

164

معادله پواسون (لایپلاس ناهمگن)

با اعمال جواب در نظر گرفته شده در معادله دیفرانسیل داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = b \\ u(y, z) = u_1(y, z) + u_2(y) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = b$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + b$$

برای به دست آمدن جواب، راحت ترین حالت را در نظر می گیریم:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + b \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0 \\ -\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + b = 0 \end{cases}$$

دو مسئله را جداگانه مشخص کرده و شرایط مرزی را برای آن ها تفکیک می کنیم.

165

معادله پواسون (لایپلاس ناهمگن)

تفکیک شرایط مرزی:

$$\begin{cases} B.C.1: u(h, z) = 0 \\ B.C.2: \frac{\partial u(0, z)}{\partial y} = 0 \\ B.C.3: u(y, L) = 0 \\ B.C.4: \frac{\partial u(y, 0)}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1(h, z) + u_2(h) = 0 \\ \frac{\partial u_1(0, z)}{\partial y} + \frac{\partial u_2(0)}{\partial y} = 0 \\ u_1(y, L) + u_2(y) = 0 \\ \frac{\partial u_1(y, 0)}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

در نتیجه، دو مسئله و شرایط مرزی را به شکل زیر تفکیک می کنیم:

166

معادله پواسون (لایپلاس ناهمگن)

مسئله اول یک معادله دیفرانسیل لاپلاس با شرایط مرزی همگن (حداقل در یک بعد) است. به عنوان تمرین اثبات کنید جواب u_1 به صورت زیر خواهد بود:

$$u_1(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n y \cosh \lambda_n z \quad \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2h}$$

معادله دوم یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ با یک متغیر مستقل می باشد که به سادگی قابل حل است:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = b \Rightarrow \frac{\partial u_2}{\partial y} = by + c_1 \Rightarrow u_2(y) = \frac{b}{2} y^2 + c_2$$

$$B.C.1: u_2(h) = 0$$

در نتیجه جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$u(y, z) = u_1(y, z) + u_2(y) = \frac{bh^2}{2} \left[\left(\frac{y}{h} \right)^2 - 1 \right] + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n y \cosh \lambda_n z$$

167

معادله پواسون (لایپلاس ناهمگن)

حال باید شرط مرزی ناهمگن (تفکیک ناپذیر) را بر روی جواب کلی اعمال کنیم:

$$B.C.3: u_1(y, L) = -u_2(y) \Rightarrow \frac{bh^2}{2} \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n y \cosh \lambda_n L$$

برای تعیین ضریب a_n باید از خاصیت تعامد تابع $\cos$ استفاده شود. اگر طرفین معادله بالا را در $\int_0^h \cos \lambda_m y dy$ ضرب کنیم داریم:

$$\frac{bh^2}{2} \int_0^h \cos \lambda_m y dy - \frac{b}{2} \int_0^h y^2 \cos \lambda_m y dy = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cosh \lambda_n L \int_0^h \cos \lambda_m y \cos \lambda_n y dy$$

و در نتیجه

$$a_n = \frac{\frac{bh^2}{2} \int_0^h \cos \lambda_n y dy - \frac{b}{2} \int_0^h y^2 \cos \lambda_n y dy}{\frac{h}{2} \cosh \lambda_n L} = \frac{2b(-1)^n}{h\lambda_n^3 \cosh \lambda_n L}$$

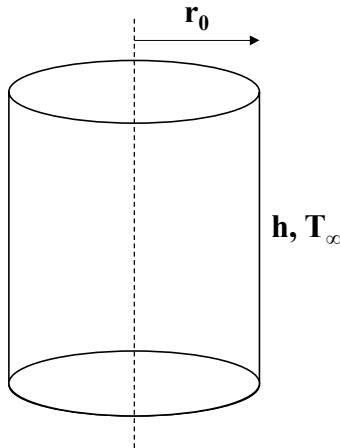
168

معادله نفوذ (Diffusion)

به معادلاتی با شکل مقابل معادله نفوذ گفته می شود:

$$\begin{cases} \nabla^2 T = 1/\alpha \frac{\partial T}{\partial t} \\ \nabla^2 C = 1/D \frac{\partial C}{\partial t} \end{cases}$$

شرط حل معادله نفوذ به روش جداسازی متغیرها این است که تمامی شرایط مرزی مسئله همگن بوده و ناهمگنی تنها در بعد زمان (شرط اولیه) باشد.



$$T = T(r, t)$$

مثال: توزیع دمای ناپایا در استوانه با شرایط مقابل را به دست آورید. استوانه متقارن بوده و طول آن بسیار زیاد می باشد.

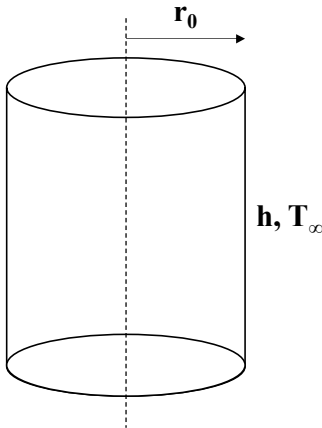
پس از مدل سازی به معادله نفوذ می رسمیم:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 1/\alpha \frac{\partial T}{\partial t}$$

169

معادله نفوذ (Diffusion)

شرایط مرزی و اولیه عبارتند از



$$\begin{cases} I.C.: t = 0 & ; & T(r, 0) = T_0 \\ B.C.1: r = 0 & ; & T(0, t) = \text{finite} \\ B.C.2: r = r_0 & ; & -k \frac{\partial}{\partial r} T(r_0, t) = h(T(r_0, t) - T_\infty) \end{cases}$$

با تغییر متغیر $\theta = T - T_\infty$ ، ناهمگنی T_∞ را رفع می کنیم:

$$\theta(r, t) = T(r, t) - T_\infty \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = 1/\alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} = 1/\alpha \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\begin{cases} I.C.: t = 0 & ; & T(r, 0) - T_\infty = \\ B.C.1: r = 0 & ; & T(0, t) - T_\infty = \\ B.C.2: r = r_0 & ; & -k \frac{\partial}{\partial r} [T(r_0, t)] = h(T(r_0, t) - T_\infty) \end{cases}$$

170

معادله نفوذ (Diffusion)

با استفاده از روش تفکیک متغیرها داریم

$$T(r, t) = R(r) \cdot \Gamma(t) \Rightarrow \Gamma(t) \cdot R''(r) + \frac{1}{r} \Gamma(t) \cdot R'(r) = \frac{1}{\alpha} \cdot R(r) \cdot \Gamma'(t)$$

با تقسیم کل عبارت بر جواب در نظر گرفته شده داریم:

$$\xrightarrow{\div R(r) \cdot \Gamma(t)} \frac{R''(r)}{R'(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \beta = -\lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} r^2 R'' + r R' + r^2 \lambda^2 R = 0 \\ \Gamma' = -\alpha \lambda^2 \Gamma \end{cases}$$

ابتدا حل معادله در جهت r :

$$r^2 R'' + r R' + r^2 \lambda^2 R = 0 \Rightarrow R(r) = c_1 J_0(\lambda r) + c_2 Y_0(\lambda r)$$

حال باید تفکیک شرایط اولیه و مرزی انجام گیرد:

$$\begin{cases} I.C.1: \theta(r, 0) = \theta_0 \\ B.C.1: \theta(0, t) = finite \\ B.C.2: -k \frac{\partial}{\partial r} [\theta(r_0, t)] = h \theta(r_0, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I.C.1: \theta(r, 0) = \theta_0 \\ B.C.1: R(0) = finite \\ B.C.2: -k \frac{\partial}{\partial r} [R(r_0)] = h R(r_0) \end{cases}$$

171

معادله نفوذ (Diffusion)

و با اعمال شرط مرزی دوم داریم:

$$R(r) = c_1 J_0(\lambda r)$$

$$B.C.2: r = r_0 \quad ; \quad -c_1 k \frac{\partial}{\partial r} [R(r_0)] = c_1 h R(r_0) \Rightarrow J'_0(\lambda_n r_0) + \frac{h}{k} J_0(\lambda_n r_0) = 0$$

با حل معادله در بُعد t هم داریم:

$$\Gamma' = -\alpha \lambda^2 \Gamma \Rightarrow \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = -\alpha \lambda^2 \Rightarrow \int \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} dt = \int -\alpha \lambda^2 dt \Rightarrow \ln \Gamma(t) = -\alpha \lambda^2 t + c$$

$$\Rightarrow e^{\ln \Gamma(t)} = e^{-\alpha \lambda^2 t + c} \Rightarrow \Gamma(t) = e^c \cdot e^{-\alpha \lambda^2 t} = c_3 \cdot e^{-\alpha \lambda^2 t}$$

در نتیجه جواب کلی به شکل زیر خواهد بود (اصل برهم نهی):

$$\Rightarrow \theta(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) e^{-\alpha \lambda_n^2 t}$$

حال اعمال شرط ناهمگن (شرط اولیه)

$$I.C.1: \theta(r, 0) = \theta_0 \Rightarrow \theta(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) = \theta_0$$

172

معادله نفوذ (Diffusion)

برای تعیین ضریب a_n از خاصیت تعامد تابع بسل استفاده می کنیم. با استفاده از خاصیت تعامد تابع بسل، اگر طرفین معادله قبل را در $\int_0^{r_0} J_0(\lambda_m r) r dr$ ضرب کنیم، ضریب a_n به شکل زیر به دست می آید:

$$\Rightarrow \theta_0 \int_0^{r_0} J_0(\lambda_m r) r dr = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{r_0} J_0(\lambda_n r) J_0(\lambda_m r) r dr$$

با استفاده از روابط انتگرال تابع بسل و حالت سوم خاصیت تعامد این تابع داریم:

$$\Rightarrow a_n = \frac{2\lambda_n J_1(\lambda_n r_0)}{r_0 \left(\lambda_n^2 + \frac{h^2}{k^2} \right) J_0^2(\lambda_n r_0)} (T_0 - T_{\infty})$$

و در نهایت:

$$\frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{2}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n J_1(\lambda_n r_0)}{\left(\lambda_n^2 + \frac{h^2}{k^2} \right) J_0^2(\lambda_n r_0)} J_0(\lambda_n r) e^{-\alpha \lambda_n^2 t}$$

معادله نفوذ (Diffusion) ناهمگن

در حالت کلی، ابتدا اگر بتوانیم معادله را با تغییر تابع همگن می کنیم (مانند مثال قبل). سپس با استفاده از روش جداسازی متغیرها می توان معادله را حل کرد. در صورتی که نتوانیم تابع را همگن کنیم از روش زیر استفاده می کنیم.

برای یک مسأله ناهمگن دو حالت ممکن است ایجاد شود:

۱- مسئله جواب پایا (steady state) داشته باشد که در این صورت، جواب را به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$T(x, t) = \overbrace{T_1(x, t)}^{\text{جواب گذرا}} + \overbrace{T_2(x)}^{\text{جواب پایا}}$$

↖ معادله نفوذ همگن ↖ معادله ناهمگن

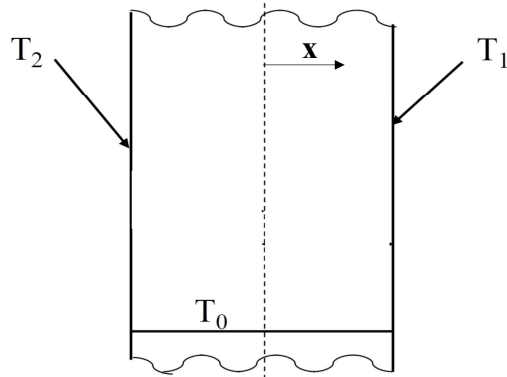
۲- مسئله جواب پایا نداشته باشد که در این حالت، فرض جواب به شکل زیر خواهد بود:

$$T(x, t) = T_1(x, t) + T_2(x) + T_3(t)$$

معادله نفوذ (Diffusion) ناهمگن

برای تشخیص این که مسئله جواب پایا دارد یا خیر، باید فیزیک مسئله مورد بررسی قرار گیرد.
مثال: یک تیغه با دمای اولیه T_0 از طرفین تحت دمای ثابت T_1 و T_2 قرار می گیرد:

$$(T_1, T_2 > T_0)$$



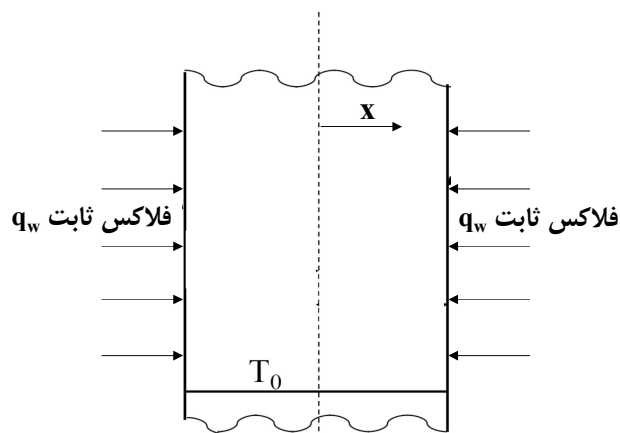
پس از گذشت مدت زمان خاصی ($t_{s.s.}$) توزیع دما به

حالت خطی می رسد.

پس حالت پایا در مسئله داریم:

معادله نفوذ (Diffusion) ناهمگن

مثال: یک تیغه با دمای اولیه T_0 از دو طرف تحت فلاکس گرمایی q_w قرار می گیرد:



از آن جا که محلی برای خروج یا مصرف

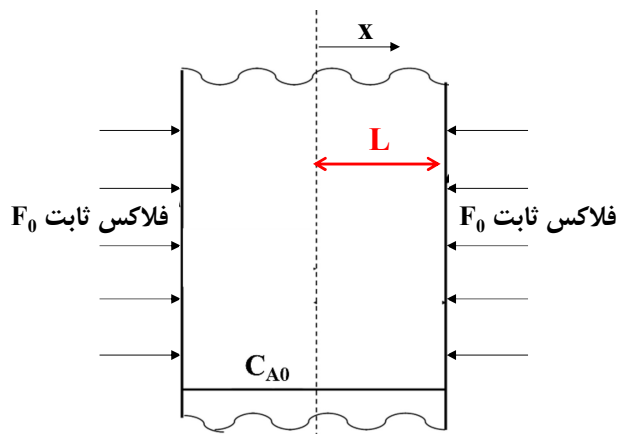
گرمای ورودی نداریم، می توان نتیجه گرفت

حالت پایا در مسئله نداریم:

$$T(x, t) = T_1(x, t) + T_2(x) + T_3(t)$$

معادله نفوذ (Diffusion) ناهمگن: مثال

مثال: جسم جامدی داریم که در لحظه اولیه، غلظت ماده A در آن برابر با C_{A0} می باشد. از دو طرف این جسم، فلاکس ثابت F_0 اعمال شده و باعث افزایش غلظت ماده A در جسم می شود. مطلوبست معادله توزیع غلظت ماده A در این جسم.



حل: ابتدا با مدلسازی به معادله زیر می رسمیم:

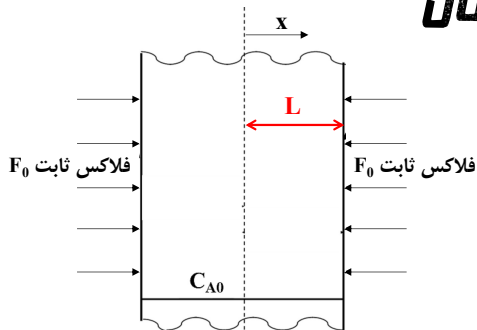
$$\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} = 1/D \frac{\partial C_A}{\partial t}$$

شرایط مرزی و اولیه عبارتند از:

$$\begin{cases} I.C.: t=0 & ; C_A(x,0) = C_{A0} \\ B.C.1: x=0 & ; \frac{\partial C_A(0,t)}{\partial x} = 0 \\ B.C.2: x=L & ; -D_A \frac{\partial C_A(L,t)}{\partial x} = -F_0 \end{cases}$$

177

معادله نفوذ (Diffusion) ناهمگن: مثال



با تغییر متغیر $\varphi(x,t) = C_A(x,t) - C_{A0}$ ، ناهمگنی C_{A0} را رفع می کنیم:

$$\varphi(x,t) = C_A(x,t) - C_{A0}$$

در نتیجه می توان نوشت:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 1/D \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

جواب را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\varphi(x,t) = \varphi_1(x,t) + \varphi_2(x) + \varphi_3(t)$$

با قرار دادن این جواب در معادله دیفرانسیل داریم

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} = 1/D \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{d\varphi_3}{dt} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - 1/D \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 1/D \frac{d\varphi_3}{dt} - \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2}$$

178

معادله نفوذ (Diffusion) ناهمگن: مثال

برای ساده سازی حل، هر کدام از طرفین معادله را برابر با صفر در نظر می گیریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0 \\ \frac{1}{D} \frac{d\varphi_3}{dt} - \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \\ \frac{1}{D} \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} \end{cases}$$

- در نتیجه، سه معادله دیفرانسیل مجزا خواهیم داشت. یک معادله دیفرانسیل پاره ای نفوذ (همگن)، و دو معادله دیفرانسیل معمولی که در فصل های قبل روش های حل این معادلات ارائه شده است.
- حال باید شرایط مرزی بررسی شود:

$$\begin{cases} I.C.: t=0 ; C_A(x,0)=C_{A_0} \\ B.C.1: x=0 ; \frac{\partial C_A(0,t)}{\partial x}=0 \\ B.C.2: x=L ; -D_A \frac{\partial C_A(L,t)}{\partial x} = -F_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_A(x,0)-C_{A_0}=C_{A_0}-C_{A_0}=0 \\ \frac{\partial (C_A(0,t)-C_{A_0})}{\partial x} = \frac{\partial C_A(0,t)}{\partial x} = 0 \\ -D_A \frac{\partial (C_A(L,t)-C_{A_0})}{\partial x} = -D_A \frac{\partial C_A(L,t)}{\partial x} = -F_0 \end{cases}$$

179

معادله نفوذ (Diffusion) ناهمگن: مثال

$$\varphi(x,t) = \varphi_1(x,t) + \varphi_2(x) + \varphi_3(t)$$

در نتیجه می توان گفت

$$\begin{cases} I.C.1: t=0 ; \varphi(x,0)=0 \\ B.C.1: x=0 ; \frac{\partial \varphi(0,t)}{\partial x}=0 \\ B.C.2: x=L ; -D_A \frac{\partial \varphi(L,t)}{\partial x} = -F_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I.C.: t=0 ; \varphi_1(x,0) + \varphi_2(x) + \varphi_3(0)=0 \\ B.C.1: x=0 ; \frac{\partial \varphi_1(0,t)}{\partial x} + \frac{d\varphi_2(0)}{dx} = 0 \\ B.C.2: x=L ; -D_A \left(\frac{\partial \varphi_1(L,t)}{\partial x} + \frac{d\varphi_2(L)}{dx} \right) = -F_0 \end{cases}$$

- در نتیجه معادلات به صورت مجزا به شکل زیر خواهند بود:

180

معادله نفوذ (Diffusion) ناهمگن: مثال

حل معادله دوم و سوم

$$(2) \left\{ \frac{1}{D} \frac{d\varphi_3}{dt} = C \Rightarrow \frac{d\varphi_3}{dt} = CD \Rightarrow \varphi_3(t) = CDt + c_1 \right.$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} = C \\ B.C.1: \frac{d\varphi_2(0)}{dx} = 0 \\ B.C.2: \frac{d\varphi_2(L)}{dx} = \frac{F_0}{D} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{d\varphi_2}{dx} = Cx + c_2 \Rightarrow \frac{d\varphi_2}{dx} = Cx \Rightarrow \varphi_2(x) = \frac{C}{2}x^2 + c_3 = \frac{F_0}{2DL}x^2 + c_3$$

$$\Rightarrow CL = \frac{F_0}{D} \Rightarrow C = \frac{F_0}{DL}$$

■ پس داریم



معادله نفوذ (Diffusion) ناهمگن: مثال

حال باید جواب معادله اول را به دست آوریم:

$$(1) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I.C.: t = 0 ; \varphi_1(x, 0) = -\varphi_2(x) - \varphi_3(0) \\ B.C.1: x = 0 ; \frac{\partial \varphi_1(0, t)}{\partial x} = 0 \\ B.C.2: x = L ; \frac{\partial \varphi_1(L, t)}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

■ با استفاده از روش تفکیک متغیرها داریم:

$$\varphi_1(x, t) = X(x) \cdot \Gamma(t) \Rightarrow \Gamma(t) \cdot X''(x) = \frac{1}{D} \cdot X(x) \cdot \Gamma'(t)$$

■ با تقسیم عبارت بالا بر جواب در نظر گرفته شده:

$$\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \frac{1}{D} \cdot \frac{X''(x)}{X(x)} = \beta$$



معادله نفوذ (Diffusion) ناهمگن: مثال

در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ \Gamma' = -D \lambda^2 \Gamma \end{cases}$$

ابتدا حل معادله در جهت x:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = c_4 \cos(\lambda x) + c_5 \sin(\lambda x)$$

تفکیک شرایط مرزی معادله (۱):

$$\begin{cases} I.C.: t = 0; \varphi_1(x, 0) = -\varphi_2(x) - \varphi_3(0) \\ B.C.1: x = 0; \frac{\partial \varphi_1(0, t)}{\partial x} = 0 \\ B.C.2: x = L; \frac{\partial \varphi_1(L, t)}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I.C.: \varphi_1(x, 0) = -\varphi_2(x) - \varphi_3(0) \\ B.C.1: \frac{dX(0)}{dx} = 0 \\ B.C.2: \frac{dX(L)}{dx} = 0 \end{cases}$$

183

معادله نفوذ (Diffusion) ناهمگن: مثال

و با اعمال شرط مرزی دوم داریم:

$$\Rightarrow X(x) = c_5 \cos(\lambda x) \quad ; \quad X'(x) = c_5 \lambda \sin(\lambda x)$$

$$B.C.2: x = L \quad ; \quad \frac{dX(L)}{dx} = 0 \Rightarrow \sin(\lambda_n L) = 0 \Rightarrow \lambda_n L = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

با حل معادله در بُعد t هم داریم:

$$\Gamma' = -D \lambda^2 \Gamma \Rightarrow \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = -D \lambda^2 \Rightarrow \int \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} dt = \int -D \lambda^2 dt \Rightarrow \ln \Gamma(t) = -D \lambda^2 t + c_6$$

$$\Rightarrow e^{\ln \Gamma(t)} = e^{-D \lambda^2 t + c_6} \Rightarrow \Gamma(t) = e^{c_6} \cdot e^{-D \lambda^2 t} = c_7 \cdot e^{-D \lambda^2 t}$$

در نتیجه جواب کلی به شکل زیر خواهد بود (اصل برهم نهی):

$$\Rightarrow \varphi_1(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\lambda_n x) e^{-D \lambda_n^2 t}$$

حال اعمال شرط ناهمگن (شرط اولیه)

$$I.C.1: \varphi_1(x, 0) = -\varphi_2(x) - \varphi_3(0) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\lambda_n x) = -\frac{F_0}{2DL} x^2 - c_3 - c_1$$

184

معادله نفوذ (Diffusion) ناهمگن: مثال

در نتیجه داریم

$$\Rightarrow -\frac{F_0}{2DL}x^2 = (a_0 + c_3 + c_1) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\lambda_n x)$$

برای تعیین مقادیر A_0 و a_n ، از خاصیت تعامد تابع $\cos(\lambda_n x)$ استفاده می کنیم. اگر طرفین معادله بالا

را در $\int_0^L \cos \lambda_m x dx$ ضرب کنیم داریم:

$$\Rightarrow a_n = \frac{-\frac{F_0}{2DL} \int_0^L x^2 \cos \frac{n\pi}{L} x dx}{\int_0^L \cos^2 \frac{n\pi}{L} x dx} = -\frac{2F_0 L (-1)^n}{D(n\pi)^2} \quad ; \quad A_0 = -\frac{F_0 L}{6D}$$

در نتیجه جواب کلی به شکل زیر خواهد بود:

$$C_A(x, t) - C_{A0} = \frac{F_0}{L}t + \frac{F_0}{2DL}x^2 - \frac{F_0 L}{6D} - \frac{2F_0 L}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

185

فصل پنجم



حل معادلات دیفرانسیل پاره ای به روش های دیگر



تعریف تبدیل لاپلاس

روش تبدیل لاپلاس

مثال



تبدیل لاپلاس

▪ تعریف: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ در مجموعه اعداد حقیقی برای $t \geq 0$ ، تابع $F(S)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(S) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-St} f(t) dt$$

▪ برای مثال، تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=2$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} F(S) = L\{f(t)\} &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-St} f(t) dt = \int_{t=0}^{\infty} 2e^{-St} dt = 2 \left[\frac{e^{-St}}{-S} \right]_{t=0}^{\infty} \\ &= 2(0 - (-1/S)) = \frac{2}{S} \quad \text{provided } S > 0 \end{aligned}$$

تبدیل لاپلاس

■ مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=t$ را به دست آورید.

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = -\frac{1}{s} t e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} dt$$

$$= \left[-\frac{1}{s} t e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}$$

■ مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=t^n$ را به دست آورید.

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t^n dt = -\frac{t^n e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t^{n-1} dt$$

$$= \frac{n}{s} L\{t^{n-1}\} = \frac{n}{s} \left(\frac{n-1}{s} \right) L\{t^{n-2}\} = \dots = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \dots \frac{1}{s} L(1) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

189

تبدیل لاپلاس

■ تبدیل لاپلاس برخی توابع مهم

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$		$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	1	$1/s$	7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
2	t	$1/s^2$	8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
3	t^2	$2!/s^3$	9	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
4	t^n ($n = 0, 1, \dots$)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	10	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
5	t^a (a positive)	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	11	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	12	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$

190

خواص تبدیل لاپلاس

■ قضیه: نشان دهید

$$L\{\alpha f(x) + g(x)\} = \alpha L\{f(x)\} + L\{g(x)\}$$

■ اثبات: چون α یک عدد ثابت می باشد پس

$$L(\alpha f(x) + g(x)) = \int_0^{\infty} e^{-sx} (\alpha f(x) + g(x)) dx$$

$$= \alpha \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx + \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x) dx = \alpha L(f(x)) + L(g(x))$$

■ مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=5x^2+12$ و $g(x)=3e^{2x}+3x$ را به دست آورید.

$$L(f(x)) = L(5x^2 + 12) = 5L(x^2) + 12L(1) = 5 \times \frac{2!}{s^3} + 12 \times \frac{1}{s} = \frac{10}{s^3} + \frac{12}{s}$$

$$L(g(x)) = L(3e^{2x} + 3x) = 3L(e^{2x}) + 3L(x) = 3 \times \frac{1}{s-2} + 3 \times \frac{1}{s^2} = \frac{3}{s-2} + \frac{3}{s^2}$$

191

خواص تبدیل لاپلاس

■ مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=\sin \alpha x$ و $g(x)=\cos \alpha x$ را به دست آورید.

تبدیل لاپلاس تابع $h(x)=e^{i\alpha x}$ عبارتست از

$$L(e^{i\alpha x}) = \frac{1}{s-i\alpha} = \frac{1}{s-i\alpha} \times \frac{s+i\alpha}{s+i\alpha} = \frac{s+i\alpha}{s^2+\alpha^2} = \frac{s}{s^2+\alpha^2} + i \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

از طرف دیگر

$$L(e^{i\alpha x}) = L(\cos \alpha x + i \sin \alpha x) = L(\cos \alpha x) + iL(\sin \alpha x)$$

در نتیجه می توان گفت

$$L(\sin \alpha x) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} \quad L(\cos \alpha x) = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$$

192

خواص تبدیل لاپلاس

■ مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = \sinh \alpha x$ و $g(x) = \cosh \alpha x$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned} L(f(x)) &= L(\sinh \alpha x) = L\left(\frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} [L(e^{\alpha x}) - L(e^{-\alpha x})] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - \alpha} - \frac{1}{s + \alpha} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{s + \alpha - s + \alpha}{s^2 - \alpha^2} \right) = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2} \\ L(g(x)) &= L(\cosh \alpha x) = L\left(\frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2}\right) = \frac{1}{2} [L(e^{\alpha x}) + L(e^{-\alpha x})] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - \alpha} + \frac{1}{s + \alpha} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{s + \alpha + s - \alpha}{s^2 - \alpha^2} \right) = \frac{s}{s^2 - \alpha^2} \end{aligned}$$

با شرط $|s| > \alpha$

193

خاصیت انتقال تبدیل لاپلاس

■ قضیه: فرض کنید $F(s) = L(f(x))$ در این صورت

$$L(e^{\alpha x} f(x)) = F(s - \alpha)$$

■ اثبات:

$$\begin{aligned} L(e^{\alpha x} f(x)) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot e^{\alpha x} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)x} f(x) dx = F(s - \alpha) \end{aligned}$$

زیرا $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$

194

کاربرد خاصیت انتقال تبدیل لاپلاس

$$L(e^{7x} \sin 5x) = \frac{5}{(s-7)^2 + 25} \quad (\text{الف})$$

$$L(e^{3x} \cos 4x) = \frac{s-3}{(s-3)^2 + 16} \quad (\text{ب})$$

$$L(e^{-2x} x^5) = \frac{5!}{(s+2)^6} \quad (\text{ج})$$

خاصیت مضرب تبدیل لاپلاس

قضیه: فرض کنید $F(s) = L(f(x))$ در این صورت

$$L(xf(x)) = -\frac{d}{ds} F(s)$$

اثبات قضیه

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds} F(s) &= -\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = -\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-sx} f(x) dx \\ &= -\int_0^{\infty} (-x) e^{-sx} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} (xf(x)) dx = L(xf(x)) \end{aligned}$$

خاصیت مضرب تبدیل لاپلاس

از این قضیه می توان نتیجه گرفت

$$L(x^2 f(x)) = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

اثبات

$$\begin{aligned} L(x^2 f(x)) &= L(x \cdot x f(x)) = (-1) \frac{d}{ds} L(x f(x)) \\ &= (-1)^2 \frac{d}{ds} \frac{d}{ds} L(f(x)) = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} F(s) \end{aligned}$$

به همین صورت می توان گفت

$$L(x^n f(x)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L(f(x))$$

197

خاصیت مضرب تبدیل لاپلاس

مثال

(الف)

$$L(x \sin x) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) = -\frac{-2s}{(s^2 + 1)^2} = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

(ب)

$$L(x \cos x) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right) = -\frac{s^2 + 1 - 2s^2}{(s^2 + 1)^2} = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$$

(ج)

$$\begin{aligned} L(x^2 \sin x) &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{2s}{(s^2 + 1)^2} \right) = -\frac{2(s^2 + 1)^2 - 8s^2(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)^4} \\ &= \frac{-6s^4 - 4s^2 + 2}{(s^2 + 1)^4} \end{aligned}$$

198

تبدیل لاپلاس مشتق تابع

قضیه: اگر $L(y) = Y(s)$ باشد می توان نشان داد

$$L(y') = sL(y) - y(0) \Rightarrow L(y') = sY(s) - y(0)$$

هم چنین برای مشتق دوم

$$L(y'') = s^2L(y) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

و برای مشتق n ام

$$\begin{aligned} L(y^{(n)}) &= s^n L(y) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0) \\ &= s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

معکوس تبدیل لاپلاس

فرض کنیم تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ وجود داشته باشد. در این صورت واضح است که تابع منحصر بفردی مانند $F(s)$ وجود دارد که

$$F(s) = L(f(x))$$

حال عکس این حالت را در نظر می گیریم. فرض کنید تابعی مانند $F(s)$ داده شده باشد. آیا تابع منحصر بفردی مانند $f(x)$ وجود دارد به گونه ای که داشته باشیم:

$$F(s) = L(f(x))$$

$$f(x) = L^{-1}(F(s))$$

اگر چنین تابعی وجود داشته باشد می توان نوشت

که $f(x)$ را معکوس تبدیل لاپلاس تابع $F(s)$ می نامیم.

خواص معکوس تبدیل لاپلاس

قضیه: می توان نشان داد

$$L^{-1}(F(s - \alpha)) = e^{\alpha x} f(x)$$

مثال: معکوس لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 - 4s + 5}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2 + 1^2}\right) = e^{2x} \cdot \sin x \quad (\text{الف})$$

$$L^{-1}\left(\frac{6}{(s+2)^2 + 9}\right) = 2L^{-1}\left(\frac{3}{(s+2)^2 + 3^2}\right) = 2e^{-2x} \cdot \sin 3x \quad (\text{ب})$$

$$L^{-1}\left(\frac{12}{(s+3)^4}\right) = 2L^{-1}\left(\frac{3!}{(s+3)^4}\right) = 2e^{-3x} \cdot x^3 \quad (\text{ج})$$

$$L^{-1}\left(\frac{s+3}{s^2 + 2s + 5}\right) = L^{-1}\left(\frac{s+1+2}{(s+1)^2 + 2^2}\right) = L^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}\right) \quad (\text{د})$$

$$= e^{-x} \cos 2x + e^{-x} \sin 2x$$



تبدیل لاپلاس مشتق تابع

اگر y را به صورت تابعی از x و t داشته باشیم، برای $L\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ خواهیم داشت

$$L\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right) = \int_0^\infty \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} e^{-st} dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty y(x,t) e^{-st} dt = \frac{\partial Y(x,S)}{\partial x}$$

یعنی لاپلاس مشتق تابع y نسبت به x برابر با مشتق لاپلاس تابع y نسبت به x می باشد.

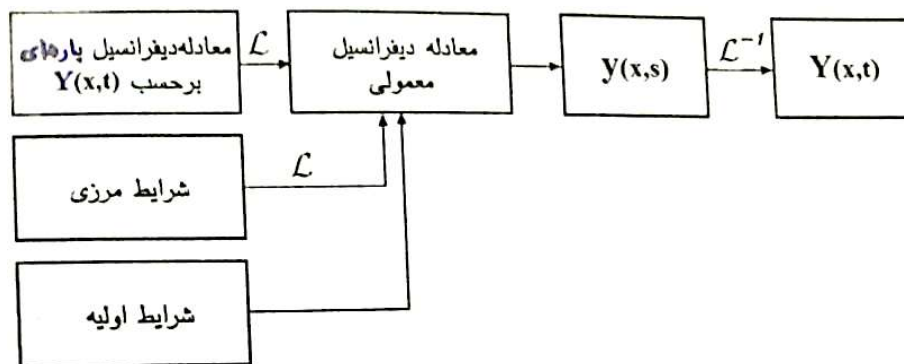
به همین ترتیب برای مشتق دوم داریم:

$$L\left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right) = \int_0^\infty \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} e^{-st} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty y(x,t) e^{-st} dt = \frac{\partial^2 Y(x,S)}{\partial x^2}$$



مراحل حل با روش تبدیل لاپلاس

- این روش برای معادلاتی به کار می رود که **شرایط اولیه** برای آن ها ارائه شده است.
- برای حل معادلات دیفرانسیل پاره ای به کمک تبدیل لاپلاس، ابتدا از طرفین معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی لاپلاس گرفته و سپس با قرار دادن شرایط اولیه و لاپلاس شرایط مرزی در معادله به دست آمده، به معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) می رسیم که روش های حل آن در بخش های قبل ارائه شده است. پس از حل ODE، با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس جواب نهایی به دست می آید.



مثال

- در یک جسم (میله نازک) نیمه بی نهایت با دمای ابتدایی T_0 ، دمای سطح مقطع میله به طور ناگهانی به T_1 برده می شود. معادله توزیع دما در این جسم را به دست آورید.

$$T(x,t) = ???$$



$$\alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

حل: از طرفین معادله دیفرانسیل و **شرایط مرزی** لاپلاس می گیریم:

$$\alpha \frac{\partial^2 T(x,S)}{\partial x^2} = ST(x,S) - T(x,0)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\alpha \frac{d^2 T(x, S)}{dx^2} - ST(x, S) = -T_0$$

معادله فوق یک معادله دیفرانسیل معمولی درجه دوم و خطی است.

جواب همگن:

$$\alpha m^2 - S = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{S}{\alpha} \Rightarrow m = \pm \sqrt{\frac{S}{\alpha}} \Rightarrow T_c(x, S) = c_1 e^{-\sqrt{\frac{S}{\alpha}} x} + c_2 e^{\sqrt{\frac{S}{\alpha}} x}$$

جواب ناهمگن (به کمک حدس جواب):

$$T_p(x, S) = A = cte \Rightarrow T_p(x, S) = \frac{T_0}{S}$$

پس می توان نوشت:

$$\Rightarrow T(x, S) = T_c(x, S) + T_p(x, S) = c_1 e^{-\sqrt{\frac{S}{\alpha}} x} + c_2 e^{\sqrt{\frac{S}{\alpha}} x} + \frac{T_0}{S}$$

برای تعیین ثوابت c_1 و c_2 ، از شرایط مرزی استفاده می کنیم:

$$T(x, S) = c_1 e^{-\sqrt{\frac{S}{\alpha}} x} + c_2 e^{\sqrt{\frac{S}{\alpha}} x} + \frac{T_0}{S}$$

$$\begin{cases} B.C.1: x=0 & ; & T(0, S) = \frac{T_1}{S} \\ B.C.2: x=\infty & ; & T(\infty, S) = \frac{T_0}{S} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{T_1 - T_0}{S} \\ c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow T(x, S) = (T_1 - T_0) \frac{e^{-\sqrt{\frac{S}{\alpha}} x}}{S} + \frac{T_0}{S}$$

برای تعیین جواب نهایی، باید از معادله به دست آمده لاپلاس معکوس گرفته شود:

$$T(x, t) = L^{-1} \{T(x, S)\} = L^{-1} \left\{ (T_1 - T_0) \frac{e^{-\sqrt{\frac{S}{\alpha}} x}}{S} + \frac{T_0}{S} \right\} = L^{-1} \left\{ (T_1 - T_0) \frac{e^{-\sqrt{\frac{S}{\alpha}} x}}{S} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{T_0}{S} \right\}$$

مثال

می دانیم:

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) \quad \left| \quad \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right.$$

$$1 \quad \left| \quad \frac{1}{s}\right.$$

در نتیجه می توان نوشت

$$\Rightarrow T(x,t) = (T_1 - T_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) + T_0$$

یا به عبارت دیگر

$$\frac{T(x,t) - T_0}{T_1 - T_0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)$$

207

مثال

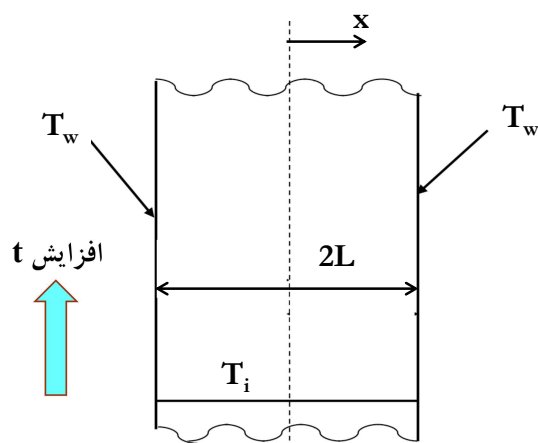
▪ صفحه ای به ضخامت $2L$ در دمای ابتدایی T_i قرار دارد. اگر دمای سطوح آن به طور ناگهانی به T_w برده شود، توزیع دمای این صفحه را به دست آورید.

حل:

$$T(x,t) = ???$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

شرایط اولیه و مرزی عبارتند از:



$$\begin{cases} I.C.: t = 0 & ; \quad T(x,0) = T_i \\ B.C.1: x = 0 & ; \quad \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0 \\ B.C.2: x = L & ; \quad T(L,t) = T_w \end{cases}$$

208

از طرفین معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی لاپلاس می گیریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} I.C.: t=0 \quad ; \quad T(x,0)=T_i \\ B.C.1: x=0 \quad ; \quad \frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=0 \\ B.C.2: x=L \quad ; \quad T(L,t)=T_w \end{array} \right. \xrightarrow{Laplace} \left\{ \begin{array}{l} I.C.: t=0 \quad ; \quad T(x,0)=T_i \\ B.C.1: x=0 \quad ; \quad \frac{\partial T(0,S)}{\partial x}=0 \\ B.C.2: x=L \quad ; \quad T(L,S)=\frac{T_w}{S} \end{array} \right.$$

در نتیجه می توان نوشت

$$\frac{\partial^2 T(x,S)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} [ST(x,S) - T(x,0)] \Rightarrow \frac{\partial^2 T(x,S)}{\partial x^2} - \frac{S}{\alpha} T(x,S) = -\frac{T_i}{\alpha}$$

معادله فوق یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم و خطی است.

$$\frac{\partial^2 T(x,S)}{\partial x^2} - \frac{S}{\alpha} T(x,S) = -\frac{T_i}{\alpha} \quad \left\{ \begin{array}{l} I.C.: t=0 \quad ; \quad T(x,0)=T_i \\ B.C.1: x=0 \quad ; \quad \frac{\partial T(0,S)}{\partial x}=0 \\ B.C.2: x=L \quad ; \quad T(L,S)=\frac{T_w}{S} \end{array} \right.$$

جواب همگن:

$$m^2 - \frac{S}{\alpha} = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{S}{\alpha} \Rightarrow m = \pm \sqrt{\frac{S}{\alpha}} \Rightarrow T_c(x,S) = c_1 \cosh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} x + c_2 \sinh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} x$$

جواب ناهمگن (به کمک حدس جواب):

$$T_p(x,S) = A = cte \Rightarrow T_p(x,S) = \frac{T_i}{S}$$

پس می توان نوشت:

$$\Rightarrow T(x,S) = T_c(x,S) + T_p(x,S) = c_1 \cosh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} x + c_2 \sinh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} x + \frac{T_i}{S}$$

مثال

برای تعیین ثوابت c_1 و c_2 ، از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم:

$$T(x, S) = c_1 \cosh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} x + c_2 \sinh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} x + \frac{T_i}{S}$$

$$\begin{cases} B.C.1: x=0 & ; \quad \frac{\partial T(0, S)}{\partial x} = 0 \\ B.C.2: x=L & ; \quad T(L, S) = \frac{T_w}{S} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = \frac{T_w - T_i}{S \cosh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} L} \end{cases}$$

برای تعیین جواب نهایی، باید از معادله به دست آمده لاپلاس معکوس گرفته شود:

$$T(x, t) = L^{-1} \{ T(x, S) \} = L^{-1} \left\{ (T_w - T_i) \frac{\cosh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} x}{S \cosh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} L} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{T_i}{S} \right\}$$

211

مثال

1	$\frac{1}{s}$		می‌دانیم:
		$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t / 4a^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$	

در نتیجه می‌توان نوشت

$$T(x, t) = T_i + (T_w - T_i) \left\{ 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \exp \left[-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 \alpha}{4L^2} t \right] \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right\}$$

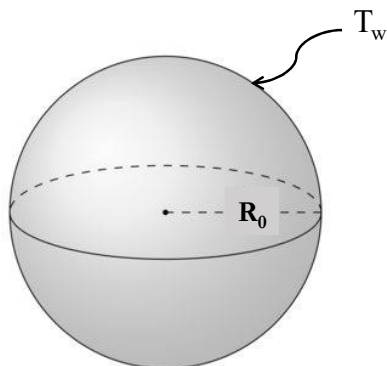
یا به عبارت دیگر

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_w - T_i} = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \exp \left[-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 \alpha}{4L^2} t \right] \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}$$

212

مثال (مختصات کروی)

■ کره ای به شعاع R_0 در دمای اولیه T_i بوده و ناگهان دمای سطح آن به T_w تغییر می کند. معادله توزیع دما در این کره را به دست آورید.



حل: می دانیم $T(r, t) = ???$

پس از مدل سازی داریم

$$K \nabla^2 \theta = \rho C \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \theta(r, t) = T(r, t) - T_i$$

در نتیجه

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial t}$$

شرایط اولیه و مرزی عبارتند از:

$$\begin{cases} I.C.: t = 0 & ; \quad \theta(r, 0) = 0 \\ B.C.1: r = 0 & ; \quad \theta(0, t) = \text{finite} \\ B.C.2: r = R_0 & ; \quad \theta(R_0, t) = T_w - T_i = \theta_w \end{cases}$$

213

مثال (مختصات کروی)

از طرفین معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی لاپلاس می گیریم:

$$r \frac{\partial^2 \theta(r, t)}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} = \frac{r}{\alpha} \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial t}$$

$$\begin{cases} I.C.: t = 0 & ; \quad \theta(r, 0) = 0 \\ B.C.1: r = 0 & ; \quad \theta(0, t) = \text{finite} \\ B.C.2: r = R_0 & ; \quad \theta(R_0, t) = \theta_w \end{cases} \xrightarrow{\text{Laplace}}$$

در نتیجه می توان نوشت

$$r \frac{\partial^2 \theta(r, S)}{\partial r^2} + \frac{\partial \theta(r, S)}{\partial r} + \frac{\partial \theta(r, S)}{\partial r} = \frac{r}{\alpha} [S \theta(r, S) - \theta(r, 0)]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} (r \theta(r, S)) + \frac{\partial \theta(r, S)}{\partial r} = \frac{S}{\alpha} r \theta(r, S) \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \theta(r, S)) = \frac{S}{\alpha} (r \theta(r, S))$$

معادله فوق یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم و خطی است.

214

مثال (مختصات کروی)

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\theta(r,S)) - \frac{S}{\alpha}(r\theta(r,S)) = 0$$

جواب معادله:

$$m^2 - \frac{S}{\alpha} = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{S}{\alpha} \Rightarrow m = \pm \sqrt{\frac{S}{\alpha}} \Rightarrow r\theta(r,S) = c_1 \cosh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} r + c_2 \sinh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} r$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow \theta(r,S) = \frac{1}{r} \left[c_1 \cosh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} r + c_2 \sinh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} r \right]$$

215

مثال

برای تعیین ثوابت c_1 و c_2 ، از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم:

$$\theta(r,S) = \frac{1}{r} \left[c_1 \cosh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} r + c_2 \sinh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} r \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I.C.: t=0 \quad ; \quad \theta(r,0)=0 \\ B.C.1: r=0 \quad ; \quad \theta(0,S)=finite \\ B.C.2: r=R_0 \quad ; \quad \theta(R_0,S)=\frac{\theta_w}{S} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1=0 \\ c_2 = \frac{R_0 \theta_w}{S \sinh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} R_0} \end{array} \right. \Rightarrow \theta(r,S) = \frac{R_0}{r} \frac{\theta_w \sinh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} r}{S \sinh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} R_0}$$

برای تعیین جواب نهایی، باید از معادله به دست آمده لاپلاس معکوس گرفته شود:

$$\theta(r,t) = L^{-1} \{ \theta(r,S) \} = L^{-1} \left\{ \frac{R_0}{r} \frac{\theta_w \sinh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} r}{S \sinh \sqrt{\frac{S}{\alpha}} R_0} \right\}$$

216

مثال (مختصات کروی)

می دانیم:

$$\frac{\sinh x \sqrt{s}}{s \sinh a \sqrt{s}} = \frac{x}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 \pi^2 t / a^2} \sin \frac{n \pi x}{a}$$

در نتیجه می توان نوشت

$$\frac{\theta(r, t)}{\theta_w} = 1 + \frac{2R_0}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \exp \left[-\frac{n^2 \pi^2 \alpha}{R_0^2} t \right] \sin \frac{n \pi r}{R_0}$$

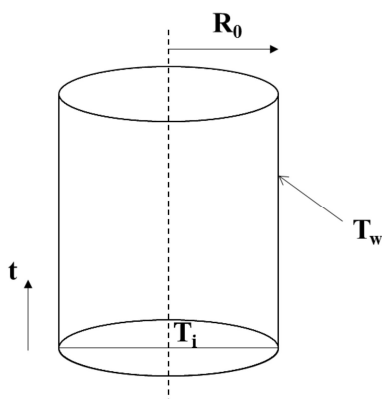
یا به عبارت دیگر

$$\frac{T(r, t) - T_i}{T_w - T_i} = 1 + \frac{2R_0}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \exp \left[-\frac{n^2 \pi^2 \alpha}{R_0^2} t \right] \sin \frac{n \pi r}{R_0}$$

217

مثال (مختصات استوانه ای)

▪ یک استوانه با طول زیاد در دمای اولیه T_i می باشد. اگر دمای سطح آن بطور ناگهانی به T_w تغییر یافته و در آن ثابت بماند، توزیع دمای این استوانه را به دست آورید.



حل: می دانیم $T(r, t) = ???$

پس از مدل سازی داریم

$$K \nabla^2 \theta = \rho C \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \theta(r, t) = T(r, t) - T_i$$

در نتیجه

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial t}$$

218

مثال (مختصات استوانه ای)

از طرفین معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی لاپلاس می گیریم:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta(r,s)}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} [s\theta(r,s) - \theta(r,0)]$$

$$\begin{cases} I.C.: t=0 & ; \quad \theta(r,0)=0 \\ B.C.1: r=0 & ; \quad \theta(0,t)=finite \\ B.C.2: r=R_0 & ; \quad \theta(R_0,t)=\theta_w \end{cases} \xrightarrow{Laplace} \begin{cases} I.C.: t=0 & ; \quad \theta(r,0)=0 \\ B.C.1: r=0 & ; \quad \theta(0,s)=finite \\ B.C.2: r=R_0 & ; \quad \theta(R_0,s)=\frac{\theta_w}{s} \end{cases}$$

در نتیجه می توان نوشت

$$r^2 \frac{\partial^2 \theta(r,s)}{\partial r^2} + r \frac{\partial \theta(r,s)}{\partial r} - \frac{s}{\alpha} r^2 \theta(r,s) = 0$$

معادله بسل اصلاح شده

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + p^2)y = 0$$

$$y = AI_k(x) + BK_k(x)$$

219

مثال (مختصات استوانه ای)

$$r^2 \frac{\partial^2 \theta(r,s)}{\partial r^2} + r \frac{\partial \theta(r,s)}{\partial r} - \frac{s}{\alpha} r^2 \theta(r,s) = 0 \quad \begin{cases} I.C.: t=0 & ; \quad \theta(r,0)=0 \\ B.C.1: r=0 & ; \quad \theta(0,s)=finite \\ B.C.2: r=R_0 & ; \quad \theta(R_0,s)=\frac{\theta_w}{s} \end{cases}$$

جواب معادله:

$$\Rightarrow \theta(r,s) = c_1 I_0 \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} r \right) + c_2 K_0 \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} r \right)$$

$$B.C.2: r=R_0 \quad ; \quad \theta(R_0,s) = \frac{\theta_w}{s} \Rightarrow \theta(R_0,s) = c_1 I_0 \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} R_0 \right) = \frac{\theta_w}{s}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{\theta_w}{s I_0 \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} R_0 \right)}$$

220

مثال (مختصات استوانه ای)

در نتیجه

$$\Rightarrow \frac{\theta(r,s)}{\theta_w} = \frac{I_0 \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} r \right)}{s I_0 \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} R_0 \right)}$$

■ برای تعیین $\theta(r,t)$ از رابطه بالا باید معکوس لاپلاس گرفته شود. اما در جداول تبدیل لاپلاس، معکوس لاپلاس این عبارت کسری یافت نمی شود.

■ از این رو، برای تعیین جواب از قضیه ای به نام قضیه Heaviside استفاده می کنیم:

در این عبارت، $P_{(s_k)} = I_0 \left(r \sqrt{\frac{s_k}{\alpha}} \right)$ می باشد.

$$L^{-1} \left\{ \frac{I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \right)}{s I_0 \left(R_0 \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \right)} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{(s_k)}}{\left. \frac{dQ}{ds} \right|_{s=s_k}}$$

که s_k ریشه های معادله $s I_0 \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} R_0 \right) = 0$ می باشد.

221

مثال (مختصات استوانه ای)

در نهایت خواهیم داشت

$$\frac{\theta(r,t)}{\theta_w} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\lambda_k \frac{r}{R_0} \right)}{\lambda_k J_1(\lambda_k)} \exp \left(-\frac{\alpha \lambda_k^2}{R_0^2} t \right)$$

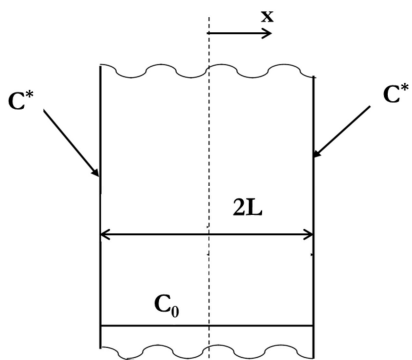
در نتیجه

$$\frac{T(r,t) - T_i}{T_w - T_i} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\lambda_k \frac{r}{R_0} \right)}{\lambda_k J_1(\lambda_k)} \exp \left(-\frac{\alpha \lambda_k^2}{R_0^2} t \right)$$

222

مثال

■ در صفحه ای به ضخامت $2L$ ، در ابتدا غلظت ماده A در کل صفحه برابر با C_0 می باشد. از دو طرف این صفحه، ماده A به داخل صفحه نفوذ می نماید. غلظت ماده A روی دو طرف صفحه برابر با C^* می باشد. مطلوبست تعیین توزیع غلظت ماده A در صفحه بر حسب x و t . (خواص فیزیکی را ثابت در نظر بگیرید).



حل: می دانیم $C(x, t) = ???$

معادله نفوذ یک بعدی را برای صفحه از معادله زیر می نویسیم

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

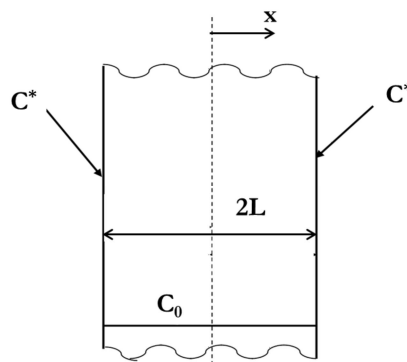
شرایط مرزی و اولیه

مثال

برای رفع ناهمگنی شرط اولیه، از تغییر متغیر $\theta(x, t) = C(x, t) - C_0$ استفاده می کنیم. در نتیجه معادلات و شرایط مرزی و اولیه به فرم زیر در می آیند:

$$\theta(x, t) = ???$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2}$$



از طرفین معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی لاپلاس می گیریم:

$$\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} \xrightarrow{\text{Laplace}} \frac{\partial^2 \theta(x,s)}{\partial x^2} = \frac{1}{D} [s\theta(x,s) - \theta(x,0)]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I.C.: t=0 \quad ; \quad \theta(x,0)=0 \\ B.C.1: x=0 \quad ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t)=0 \\ B.C.2: x=L \quad ; \quad \theta(L,t)=\theta^* \end{array} \right. \xrightarrow{\text{Laplace}} \left\{ \begin{array}{l} I.C.: t=0 \quad ; \quad \theta(x,0)=0 \\ B.C.1: x=0 \quad ; \quad \frac{\partial \theta(0,s)}{\partial x}=0 \\ B.C.2: x=L \quad ; \quad \theta(L,s)=\frac{\theta^*}{s} \end{array} \right.$$

در نتیجه می توان نوشت

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \theta(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s}{D} \theta(x,s) = 0$$

معادله فوق یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم، همگن و خطی است.

$$\frac{\partial^2 \theta(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s}{D} \theta(x,s) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} I.C.: t=0 \quad ; \quad \theta(x,0)=0 \\ B.C.1: x=0 \quad ; \quad \frac{\partial \theta(0,s)}{\partial x}=0 \\ B.C.2: x=L \quad ; \quad \theta(L,s)=\frac{\theta^*}{s} \end{array} \right.$$

جواب معادله:

$$m^2 - \frac{s}{D} = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{s}{D} \Rightarrow m = \pm \sqrt{\frac{s}{D}} \Rightarrow \theta(x,s) = c_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x + c_2 \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \theta(x,s)}{\partial x} = \sqrt{\frac{s}{D}} \left(c_1 \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} x + c_2 \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x \right) \Rightarrow \theta(x,s) = c_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x$$

$$B.C.2: x=L \quad ; \quad \theta(L,s) = \frac{\theta^*}{s} \Rightarrow c_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} L = \frac{\theta^*}{s} \Rightarrow c_1 = \frac{\theta^*}{s \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} L}$$

مثال

در نتیجه داریم

$$\Rightarrow \theta(x, s) = \frac{\cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x}{s \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} L} \theta^*$$

برای تعیین جواب نهایی می توان نوشت

$$\theta(x, t) = L^{-1} \{ \theta(x, s) \} = L^{-1} \left\{ \frac{\cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x}{s \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} L} \theta^* \right\}$$

می دانیم

$$\frac{\cosh x \sqrt{s}}{s \cosh a \sqrt{s}} = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t / 4a^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$$

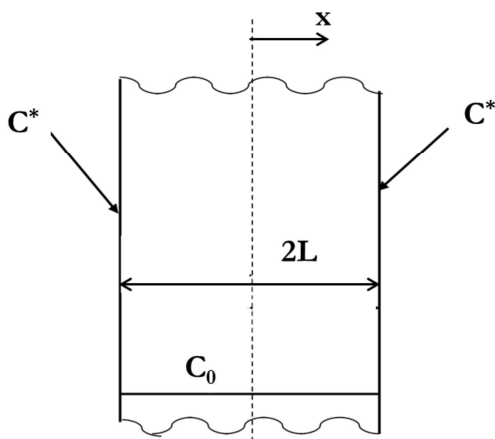
در نتیجه

$$\frac{\theta(x, t)}{\theta^*} = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \exp \left[-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 D}{4L^2} t \right] \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}$$

227

مثال

و در نهایت



$$\frac{C(x, t) - C_0}{C^* - C_0} = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \exp \left[-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 D}{4L^2} t \right] \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}$$

228



روش ترکیب متغیرها یا تشابه

Combination of Variables or Similarity



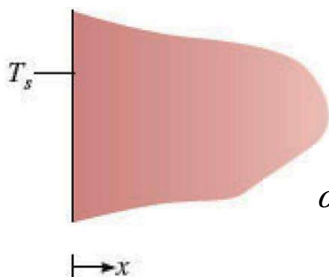
ترکیب متغیرها

▪ این روش برای حل آن دسته از معادلات دیفرانسیل پاره ای به کار می رود که سیستم دارای یک شرط مرزی بی نهایت باشد (جسم نیمه بی نهایت) یا به عبارتی در سیستم طول مشخصی تعریف نشده باشد.

▪ در این حالت، با تعریف یک متغیر جدید که ترکیبی (تابعی) از متغیرهای مستقل سیستم است، معادله دیفرانسیل پاره ای به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شده و سپس با اعمال شرایط مرزی و اولیه برحسب متغیر جدید معادله حل شده و جواب حاصل می شود.

▪ اصول این روش در مثال زیر شرح داده خواهد شد.

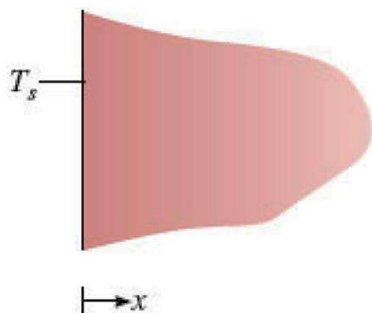
مثال: در یک جسم نیمه بی نهایت، دمای ابتدایی برابر با صفر بوده و ناگهان دمای سطح آن به T_s تغییر می کند. توزیع دما در این جسم را به دست آورید.



$$\alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

$$\begin{cases} I.C.: t=0 & ; & T(x,0)=0 \\ B.C.1: x=0 & ; & T(0,t)=T_s \\ B.C.2: x=\infty & ; & T(\infty,t)=0 \end{cases}$$

حل:



$$\alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

$$\begin{cases} I.C.: t=0 & ; T(x,0)=0 \\ B.C.1: x=0 & ; T(0,t)=T_s \\ B.C.2: x=\infty & ; T(\infty,t)=0 \end{cases}$$

ابتدا جهت سادگی حل مسئله، دمای بی بُعد $\theta = \frac{T}{T_s}$ را تعریف می کنیم. البته این کار صرفاً برای سادگی حل انجام شده و بدون این تعریف هم مسئله به راحتی حل می شود. در نتیجه داریم:

$$\theta(x,t) = \frac{T(x,t)}{T_s} \Rightarrow \alpha \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t}$$

$$\begin{cases} I.C.: t=0 & ; \theta(x,0)=0 \\ B.C.1: x=0 & ; \theta(0,t) = \frac{T(0,t)}{T_s} = 1 \\ B.C.2: x=\infty & ; \theta(\infty,t)=0 \end{cases}$$

شرایط مرزی به شکل زیر تغییر می کنند:

در روش ترکیب متغیرها برای حل معادله به دست آمده، متغیر جدیدی برحسب x و t به صورت توانی تعریف می کنیم:

$$\eta = ax^m t^n$$

a و m و n ثابت های اختیاری هستند که باید مشخص شوند. روش تعیین این ثوابت به شکل زیر است:

$$\text{ابتدا در معادله } \alpha \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} \text{ باید مشتقات برحسب } \eta \text{ بیان شوند:}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = nax^m t^{n-1} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = amx^{m-1} t^n \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(amx^{m-1} t^n \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) = \left(am(m-1)x^{m-2} t^n \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + amx^{m-1} t^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \right)$$

مثال

در معادله به دست آمده به جای $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)$ عبارت $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$ را قرار می دهیم:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(amx^{m-1}t^n \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) = amx^{m-1}t^n \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}$$

با قرار دادن در معادله قبل داریم:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \left(am(m-1)x^{m-2}t^n \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + amx^{m-1}t^n \left[amx^{m-1}t^n \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right] \right)$$

$$= \left(am(m-1)x^{m-2}t^n \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + a^2m^2x^{2(m-1)}t^{2n} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right)$$

مقادیر معادل مشتق را در معادله اصلی $\alpha \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t}$ قرار می دهیم. در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \left[\frac{nx^{-m+2}t^{-n-1}}{\alpha m^2 a} - \frac{m-1}{am} x^{-m}t^{-n} \right] \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \quad \text{or} \quad \theta'' = \left[\frac{nx^{-m+2}t^{-n-1}}{\alpha m^2 a} - \frac{m-1}{am} x^{-m}t^{-n} \right] \theta'$$

233

مثال

قبلاً اشاره شد که مقادیر a ، m و n ثوابتی انتخابی هستند. این مقادیر را باید به گونه ای انتخاب کنیم که معادله دیفرانسیل معمولی به دست آمده به شکل ساده ای در آید:

$$\theta'' = \left[\frac{nx^{-m+2}t^{-n-1}}{\alpha m^2 a} - \frac{m-1}{am} x^{-m}t^{-n} \right] \theta' \xrightarrow{m=1} \theta'' = \left[\frac{nxt^{-n-1}}{\alpha a} \right] \theta'$$

برای حذف x در معادله بالا، صورت و مخرج کسر را در at^n ضرب می کنیم تا η ایجاد شود:

$$\theta'' = \left[\frac{anxt^n t^{-n-1}}{\alpha a^2 t^n} \right] \theta' = \left[\frac{n\eta}{\alpha a^2 t^{2n+1}} \right] \theta'$$

حال باید t را حذف کنیم:

$$2n+1=0 \Rightarrow n = -\frac{1}{2} \xrightarrow{n=-\frac{1}{2}} \theta'' = -\frac{1}{2\alpha a^2} \eta \theta'$$

انتخاب مقدار a نقشی در حل مسئله ندارد و هر مقدار غیر صفر می توان برای آن در نظر گرفت. برای سادگی مخرج کسر فوق را برابر با $5/0$ در نظر می گیریم.

234

$$2\alpha a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{4\alpha}}$$

در نتیجه $m=1$, $n=-\frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{\sqrt{4\alpha}}$

پس می توان گفت $\eta = ax^m t^n = \frac{1}{\sqrt{4\alpha}} x t^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$

با انتخاب $2\alpha a^2 = \frac{1}{2}$ معادله دیفرانسیل معمولی به فرم زیر در می آید:

$$\begin{cases} \theta'' = -\frac{1}{2\alpha a^2} \eta \theta' \\ 2\alpha a^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta'' + 2\eta \theta' = 0 \quad \begin{cases} I.C.: t=0 & ; \quad \theta(x,0)=0 \\ B.C.1: x=0 & ; \quad \theta(0,t)=1 \\ B.C.2: x=\infty & ; \quad \theta(\infty,t)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta(\infty)=0 \\ \theta(0)=1 \\ \theta(\infty)=0 \end{cases}$$

$\theta(\eta) = ???$

با دو بار انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$\theta'' + 2\eta \theta' = 0 \Rightarrow \frac{\theta''}{\theta'} = -2\eta \Rightarrow \int \frac{\theta''}{\theta'} = \int -2\eta d\eta \Rightarrow \ln \theta' = -\eta^2 + c$$

$$\Rightarrow \theta' = e^{-\eta^2 + c} = e^c e^{-\eta^2} = c_1 e^{-\eta^2} \Rightarrow \theta = c_1 \int e^{-\eta^2} d\eta + c_2$$

قبلاً در تعریف تابع خطا دیده ایم:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \Rightarrow \theta = c_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\eta) + c_2$$

برای تعیین ثوابت از شرایط مرزی استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} \theta(0)=1 \\ \theta(\infty)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(0) + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1 \\ c_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\infty) + 1 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \end{cases}$$

در نتیجه

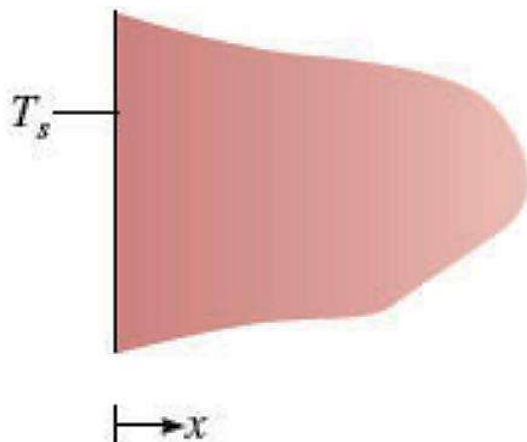
$$\Rightarrow \theta = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-\eta^2} d\eta + 1 = 1 - \operatorname{erf}(\eta) = \operatorname{erfc}(\eta)$$

مثال

و در نهایت با جایگذاری متغیرهای θ و η با مقادیر فرض شده به توزیع دما در این جسم بی نهایت می
رسیم:

$$\theta(x,t) = \frac{T(x,t)}{T_s} \Rightarrow \frac{T(x,t)}{T_s} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)$$

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$$



237

ترکیب متغیرها

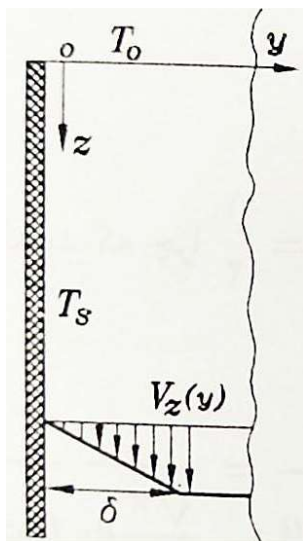
■ از جدول زیر می توان در انتخاب η و تبدیل معادله دیفرانسیل پاره ای به معمولی استفاده کرد.

PDE	η	ODE
$\frac{\partial f}{\partial t} = A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{4At}}$	$f'' + 2\eta f' = 0$
$x \frac{\partial f}{\partial t} = A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{9At}}$	$f'' + 3\eta^2 f' = 0$
$\frac{\partial f}{\partial t} = A \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} \right)$	$\frac{x}{\sqrt{9At}}$	$\eta f'' + (3\eta^2 - 1)f' = 0$

■ برای هر نوع معادله دیگری که در جدول اشاره نشده است به کمک روشی که در مثال قبل به کار گرفته شد می توان مقدار η را به دست آورد.

238

مثال



مطابق شکل، سیالی با دمای ورودی T_0 از روی سطح یک جامد با دمای ثابت T_s به صورت ریزان به پایین جاری است. در حالت پایا، توزیع دما در سیال را به دست آورید.

حل: با استفاده از معادله کلی انتقال حرارت داریم:

$$\rho C \frac{DT}{Dt} = K \nabla^2 T, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z}$$

در حالت پایا، معادله به شکل زیر در می آید:

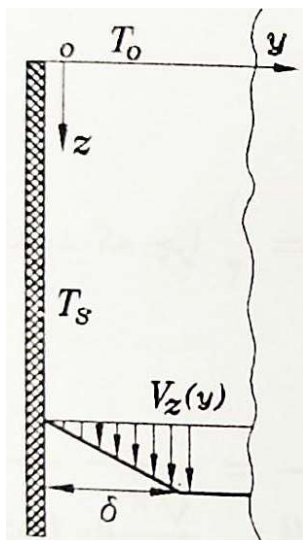
$$\rho C V_z \frac{\partial T}{\partial z} = K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

در صورتی که از انتقال حرارت هدایتی در جهت z صرف نظر کنیم داریم:

$$\rho C V_z \frac{\partial T}{\partial z} = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

239

مثال



می دانیم در فیلم مایع ریزان، توزیع سرعت $V_z(y)$ به صورت خطی و معادله آن به شکل زیر می باشد:

$$V_z(y) = \frac{\rho g \delta}{\mu} y$$

در نتیجه معادله دیفرانسیل به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\begin{cases} \rho C V_z \frac{\partial T}{\partial z} = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ V_z(y) = \frac{\rho g \delta}{\mu} y \end{cases} \Rightarrow \rho C \left(\frac{\rho g \delta}{\mu} y \right) \frac{\partial T}{\partial z} = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Rightarrow y \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{K \mu}{\rho^2 g \delta C} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

در نتیجه

$$y \frac{\partial T}{\partial z} = \beta \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$T(y, z) = ???$$

$$\begin{cases} B.C.1: z = 0 & ; T(y, 0) = T_0 \\ B.C.2: y = 0 & ; T(0, z) = T_s \\ B.C.3: y = \infty & ; T(\infty, z) = T_0 \end{cases}$$

240

مثال

برای سادگی حل مسئله، متغیر بی بُعد θ را به شکل زیر تعریف کرده و معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی را برحسب این متغیر می نویسیم:

$$\theta(y, z) = \frac{T(y, z) - T_0}{T_s - T_0} \Rightarrow y \frac{\partial \theta}{\partial z} = \beta \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad \begin{cases} B.C.1: z=0 & ; \quad \theta(y, 0) = 0 \\ B.C.2: y=0 & ; \quad \theta(0, z) = 1 \\ B.C.3: y=\infty & ; \quad \theta(\infty, z) = 0 \end{cases}$$

با استفاده از جدول اشاره شده در اسلاید ۱۲ همین جلسه:

$$\eta = \frac{y}{\sqrt[3]{9\beta z}} \Rightarrow \theta'' + 3\eta^2 \theta' = 0 \quad \begin{cases} B.C.1: \eta = \infty & ; \quad \theta(\infty) = 0 \\ B.C.2: \eta = 0 & ; \quad \theta(0) = 1 \\ B.C.3: \eta = \infty & ; \quad \theta(\infty) = 0 \end{cases}$$

با دو بار انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل معمولی به دست آمده داریم:

$$\theta = c_1 \int_0^\eta e^{-u^3} du + c_2$$

؟؟؟؟؟



مثال

برای تعیین ثوابت از شرط های مرزی استفاده می کنیم:

$$\theta = c_1 \int_0^\eta e^{-u^3} du + c_2$$

$$\begin{cases} \theta(0) = 1 \\ \theta(\infty) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1 \\ 0 = c_1 \int_0^\infty e^{-u^3} du + 1 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{\int_0^\infty e^{-u^3} du} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{-\int_0^\eta e^{-u^3} du}{\int_0^\infty e^{-u^3} du} + 1$$

با منخرج مشترک گیری داریم:

$$\Rightarrow \theta = \frac{\int_0^\infty e^{-u^3} du - \int_0^\eta e^{-u^3} du}{\int_0^\infty e^{-u^3} du} = \frac{\int_\eta^\infty e^{-u^3} du}{\int_0^\infty e^{-u^3} du}$$



مثال

با تغییر متغیر $u^3 = t$ انتگرال منجر کسر را می توان به دست آورد:

$$u^3 = t \Rightarrow 3u^2 du = dt \Rightarrow du = \frac{1}{3} u^{-2} dt = \frac{1}{3} \left(t^{\frac{1}{3}} \right)^{-2} dt = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-u^3} du = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} dt = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)$$

در نتیجه

$$\Rightarrow \theta = \frac{T(y, z) - T_0}{T_s - T_0} = \frac{\int_{\eta}^{\infty} e^{-u^3} du}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}$$

برای تعیین دمای هر نقطه با y و z مشخص، ابتدا مقدار $\eta = \frac{y}{\sqrt[3]{9\beta z}}$ را مشخص کرده و با قرار دادن در معادله بالا، دمای آن نقطه را به دست می آوریم.

243



Any Question?

